

11. WYCENA NIERUCHOMOŚCI Z WYKORZYSTANIEM METODY WIELOCZYNNIKOWYCH MODELI STATYSTYCZNYCH

Magdalena Rogalska¹

11.1. WSTĘP

Obecnie przy wycenie nieruchomości w Polsce stosuje się podejścia: porównawcze, dochodowe, kosztowe i mieszane. W podejściu porównawczym wykorzystywane są: metoda porównywania parami, korygowania ceny średniej oraz analizy statystycznej rynku. Przy metodzie porównywania parami porównuje się nieruchomość będącą przedmiotem wyceny, której cechy są znane, kolejno z nieruchomościami podobnymi, które były przedmiotem obrotu rynkowego i dla których znane są ceny transakcyjne, warunki zawarcia transakcji, a także cechy tych nieruchomości. Podejście porównawcze stosuje się wyłącznie wówczas, gdy nieruchomości podobne do nieruchomości będącej przedmiotem wyceny były w obrocie na określonym rynku w okresie ostatnich dwóch lat poprzedzających wycenę, a także gdy ich ceny i cechy wpływające na te ceny oraz warunki dokonania transakcji są znane. Jeżeli z przepisów prawa wynika potrzeba określenia wartości nieruchomości na datę wcześniejszą niż data sporządzenia wyceny, to w przypadku braku danych o cenach transakcyjnych sprzed tej daty, do porównań mogą być przyjęte ceny transakcyjne stosowane na rynku po dacie, na którą tę wycenę się sporządza. W szczególnie uzasadnionych przypadkach dopuszcza się przyjęcie do porównań nieruchomości, które były przedmiotem obrotu rynkowego w okresie poprzedzającym, dłuższym niż dwa lata. Może to mieć miejsce na przykład wówczas, gdy określony rynek jest słabo rozwinięty, co oznacza, że transakcje

¹Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury, e-mail: m.rogalska@pollub.pl

kupna sprzedaży określonych rodzajów nieruchomości występują na nim rzadko (sporadycznie). Przy metodzie korygowania ceny średniej do porównań przyjmuje się grupę nieruchomości reprezentatywnych dla rynku właściwego miejscowo ze względu na położenie wycenianej nieruchomości, jeżeli były one przedmiotem obrotu rynkowego i dla których znane są ceny transakcyjne, warunki zawarcia transakcji, a także cechy tych nieruchomości. Metoda analizy statystycznej znajduje coraz większe zastosowanie (Kowalczyk 2007, Cellmer 1999, Hozer 2002, Mazurkiewicz 1999, Wiśniewski 1998, Pawlukowicz 2003, McCluskey 1996) zastosowanie. Zwykle używane są do obliczeń sieci neuronowe. Nie analizowano możliwości zastosowania innych metod wyznaczania regresji do wyceny nieruchomości. Proponuje się wykorzystanie do wyceny nieruchomości również inne metody: regresji wielorakiej, wieloimiennej regresji adaptacyjnej z użyciem funkcji sklepanych, uogólnionych modeli addytywnych, wektorów nośnych. Otrzymuje się w ten sposób wiele modeli prognostycznych. Wybiera się do stosowania model charakteryzujący się najmniejszym błędem prognostycznym. Nie zakłada się a priori, że jedyną prawidłową metodą jest metoda sieci neuronowych.

Metody statystyczne wymagają zebrania bardzo dużej liczby danych i są niezwykle pracochłonne na etapie wyznaczania równania regresji. W późniejszym etapie korzystanie ze wzoru regresyjnego jest niezwykle proste. Zwykle w etapie końcowym sporządza się arkusz kalkulacyjny w programie Microsoft Excel z możliwością wpisywania zmiennych niezależnych lub sieć neuronową, w której istnieje możliwość analizy nowych przypadków. W ten sposób można wykonać przy małym nakładzie pracy bardzo szeroką analizę cen nieruchomości dla potencjalnego nabywcy. Nabywca określa swoje preferencje, które umieszczane są w arkuszu kalkulacyjnym i otrzymuje natychmiast odpowiedź dotyczącą ceny nieruchomości z zastosowaniem wzoru regresyjnego. Zmiana jednej lub wielu zmiennych niezależnych powoduje zmianę kosztu zakupu mieszkania lub domu.

11.2. WIELOCZYNNIKOWE MODELE STATYSTYCZNE W PROGNOZOWANIU INŻYNIERSKIM

11.2.1. WPROWADZENIE

Metoda wieloczynnikowych modeli statystycznych WMMS opracowana (Rogalska, 2016) bazuje na analizie wyników zastosowania metod prognostycznych: regresji wielorakiej, wieloimiennej regresji adaptacyjnej z użyciem funkcji sklepanych, uogólnionych modeli addytywnych, sztucznych sieci neuronowych, wektorów nośnych. W wyniku obliczeń różnymi metodami otrzymuje się wiele modeli prognostycznych, z których wybiera się do stosowania model charakteryzujący się najmniejszym błędem prognostycznym. Istnieje możliwość wprowadzania do obliczeń bardzo dużej liczby czynników, którym przypisuje się wartości liczbowe lub lingwistyczne. Zaproponowana metoda jest uniwersalna, istnieje możliwość za-

stosowania jej w odniesieniu do wszystkich zagadnień naukowych i inżynierskich. Zakres metody obejmuje definiowanie problemu prognostycznego, przygotowanie danych do obliczeń, obliczenia prognostyczne z analizą i oceną porównawczą uzyskanych modeli z wykorzystaniem średniego absolutnego błędu procentowego *MAPE* oraz autokorelacji i autokorelacji cząstkowej szeregu resztowego.

11.2.2. MODEL REGRESYJNY

Budowa modeli regresyjnych jest jedną z najbardziej popularnych metod analizy danych statystycznych wykorzystywaną w każdej dziedzinie nauki. Główną ideą regresji jest przewidywanie, prognozowanie danych dla pewnej zmiennej, zwanej zmienną zależną, na podstawie innych zmiennych niezależnych. Celem określenia wartości jednej zmiennej na podstawie innej zmiennej lub zmiennych, musimy za pomocą analizy regresji skonstruować model regresyjny, model, który będzie z założonym błędem statystycznym przewidywał wartość zmiennej zależnej. Regresja dotyczy sytuacji, w której na podstawie jednej lub wielu zmiennych chcemy prognozować wartość innej zmiennej, co oznacza, że analiza regresji służy temu, aby stwierdzić, czy na podstawie danej zmiennej (bądź zestawu zmiennych) możemy przewidywać inną zmienną (zmienną zależną, objaśnianą) – jeżeli można, jaki model będzie najbardziej dokładny w swoich prognozach. W praktyce zawsze występuje pewna wielkość błędu oszacowania. Im model jest lepszy, tym błąd będzie mniejszy, im model będzie gorszy, tym przewidywany błąd będzie większy. Modele regresyjne muszą zakładać wystąpienie błędu oszacowania. Ideą regresji jest zminimalizowanie błędu oszacowania do tego stopnia, aby model był przydatny w swoich prognozach. Analiza regresji umożliwia utworzenie funkcji matematycznej opisującej zależność pomiędzy predyktorem (predyktorami) a zmienną zależną. Regresję zatem możemy określić jako funkcję matematyczną opisującą zależność pomiędzy predyktorem lub predyktorami a zmienną zależną, z uwzględnieniem błędu losowego. Wzór na ogólną postać regresji ma postać:

$$Y = f(X, \beta) + \varepsilon, \quad (1)$$

gdzie

X – predyktor, zmienna wyjaśniająca, przewidująca,

Y – zmienna zależna, zmienna wyjaśniana, przewidywana,

β – współczynnik regresji,

$f(X, \beta)$ – równanie regresji,

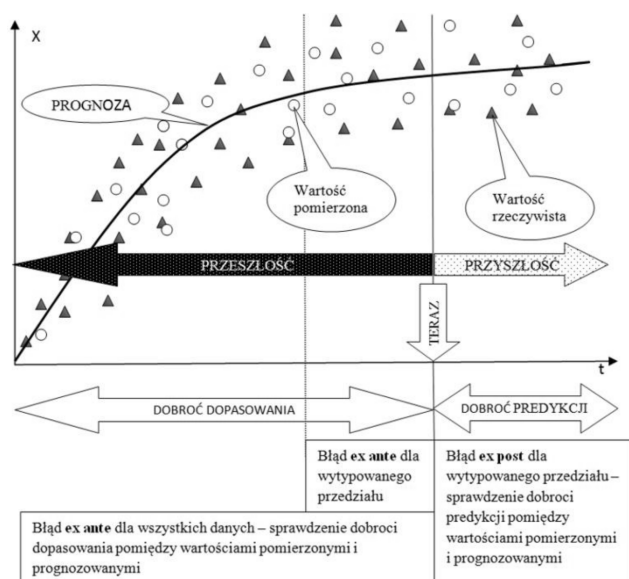
ε – błąd losowy.

Z matematycznego punktu widzenia regresją nazywana jest każda metoda, która umożliwia oszacowanie tego równania.

11.2.3. METODA WIELOCZYNNIKOWA W PROGNOZOWANIU INŻYNIERSKIM

Prognoza to szacowanie wartości jednej zmiennej na podstawie wyników innej zmiennej lub zmiennych, wtedy gdy zmienne te są ze sobą skorelowane. Korelacja pomiędzy zmiennymi nie musi mieć charakteru liniowego. Im wyższa korelacja między tymi zmiennymi tym lepsza prognoza.

Prognoza na podstawie linii regresji to poszukiwanie linii regresji najlepiej dopasowanej do wartości zmiennej zależnej (przy jej prognozowaniu) na podstawie zmiennych niezależnych. Linia regresji opisywana jest za pomocą równania regresji. Metoda ta wykorzystuje wszystkie wyniki próby badawczej. Linia wyznaczona na podstawie danych z próby może różnić się od linii najlepiej dopasowanej do wyników populacji. Wartości pomierzone również mogą różnić się wartości rzeczywistych z populacji (rys. 1) np. ze względu na błędy pomiarowe.

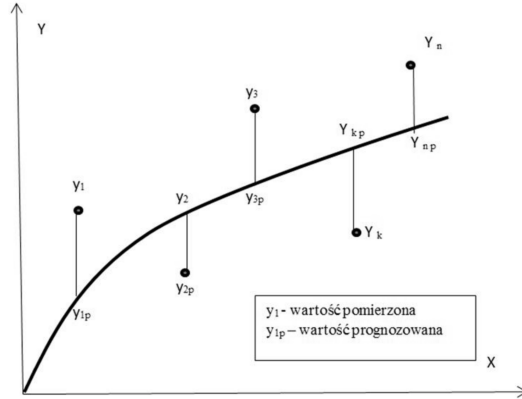


Rys. 1. Schemat prognozy na podstawie linii regresji dla czasu jako zmiennej niezależnej.

Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

Najlepiej dopasowana linia regresji (rys. 2) to taka linia, która minimalizuje np. sumę kwadratów odchyleń między wartościami pomierzonymi a ich wartościami przewidywanymi (tzw. kryterium najmniejszych kwadratów).

Linia regresji jest opisywana równaniem regresji. Postać tego równania jest różna w zależności od korelacji między zmiennymi oraz przyjętej metody obliczeniowej. Bardzo rzadko zdarza się, że linia regresji przyjmuje postać liniową. Prognozując wykorzystuje się zwykle wiele metod obliczeniowych, a w metodach tych wiele modeli prognozyjnych. Otrzymuje się wiele możliwości potencjalnych równań regresji. Warunkiem podstawowym doboru jednego z nich jako właściwe-



Rys. 2. Wartości pomierzone i prognozowane wraz z linią regresji.
 Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

go, jest nie występowanie w jego szeregu resztowym autokorelacji i autokorelacji cząstkowych (szczególnie w pierwszych 5 opóźnieniach). Wybór najlepszego rozwiązania następuje poprzez uwzględnienie najmniejszych błędów predykcyjnych. Można określać błędy *ex ante* i *ex post*. Mierniki *ex ante* to mierniki, które podają spodziewany rząd odchyżeń rzeczywistych realizacji zmiennej prognozowanej od prognoz; mierniki te oblicza się przed realizacją. Mierniki *ex post* podają wielkość rzeczywistego odchylenia wartości zmiennych od prognoz; mierniki te oblicza się po zrealizowaniu wydarzeń prognozowanych. Zobrazowano to na rysunku 1.

11.2.4. BŁĘDY PROGNOZ

Celem analitycznej oceny poprawności predykcji oblicza się błędy prognoz (King i Minium 2009): *ME*, *MAE*, *MPE* i *MAPE* dane wzorami (2), (3), (4) i (5):

$$ME = \frac{1}{T-n} \sum_{i=T-n}^T (Y_i - Y_{ip}), \quad (2)$$

$$MAE = \frac{1}{T-n} \sum_{i=T-n}^T |Y_i - Y_{ip}|, \quad (3)$$

$$MPE = \frac{1}{T-n} \sum_{i=T-n}^T \frac{Y_i - Y_{ip}}{Y_i}, \quad (4)$$

$$MAPE = \frac{1}{T-n} \sum_{i=T-n}^T \frac{|Y_i - Y_{ip}|}{Y_i}, \quad (5)$$

gdzie:

ME – średni błąd (mean error),

MAE – średni osiągnięty błąd (mean average error),

MPE – średni błąd procentowy (mean percentage error),

$MAPE$ – średni absolutny procentowy błąd (mean absolute percentage error),

T – suma liczby okresów obliczeniowych i prognozowanych,

n – liczba okresów prognozowanych,

Y_i – wartość rzeczywista zmiennej w okresie i ,

Y_{ip} – wartość prognozowana zmiennej w okresie i .

Błąd $MAPE$ jest najbardziej miarodajny. Jest podstawowym miernikiem prawidłowości obliczeń. Dlatego proponuje się używanie go do wyboru najlepszego modelu predykcyjnego. Jeżeli odbiorca prognozy nie poda własnych kryteriów dopuszczalności prognoz, proponuje się przyjęcie, że jeżeli:

- $MAPE \leq 1\%$, to prognozy są doskonałe (celujący 6),
- $1\% < MAPE \leq 3\%$, to prognozy są wysoce dokładne (bardzo dobry 5),
- $3\% < MAPE \leq 5\%$, to prognozy uznajemy za dobre (dobry 4),
- $5\% < MAPE \leq 10\%$, to prognozy uznajemy za dostateczne (dostateczny 3),
- $10\% < MAPE \leq 15\%$, to prognozy są mało dokładne, ale mogą być przyjęte dopuszczalne (dopuszczający 2),
- $MAPE > 15\%$, to prognozy są niedokładne, nie powinny być przyjęte (nie-dostateczny 1).

11.2.5. FUNKCJA AUTOKORELACJI RESZT I AUTOKORELACJI CZĄSTKOWEJ RESZT

Przy założeniu, że dane z próby zostaną uporządkowane, możemy do ich analizy – poprzez analogię – posłużyć się metodami stosowanymi do badania szeregów czasowych. Przy tym założeniu szereg resztowy, który powstaje jako różnica pomiędzy wartościami danymi (pomierzonymi) a wartościami prognozowanymi, powinien mieć średnią bliską zera, chociaż jednocześnie jego odchylenie standardowe nie musi być wartością zerową. Z tego względu warunkiem koniecznym w procesie prognozowania jest analiza szeregów resztowych wygenerowanych modeli. Służy do tego analiza funkcji autokorelacji reszt (składnika losowego) oraz funkcja autokorelacji cząstkowej reszt.

Autokorelacja składnika losowego to korelacja między składnikami losowymi $e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_t$ modelu (Maddala, 2002). Korelacja między e_t i e_{t-k} jest

określana mianem autokorelacji rzędu k i oznaczana jest przez ρ_k (6):

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(e_t, e_{t-k})}{\sigma_t \cdot \sigma_t} = \frac{\sum_{k=1}^t [(e_t - \bar{e}) \cdot (e_{t-k} - \bar{e})]}{t-1} \cdot \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^t (e_t - \bar{e})^2}{t-1}} \right]^2}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^t [(e_t - \bar{e}) \cdot (e_{t-k} - \bar{e})]}{\sum_{k=1}^t (e_t - \bar{e})^2} . \quad (6)$$

Jeśli model jest prawidłowy nie powinna zachodzić autokorelacja składnika losowego.

Skutki autokorelacji składnika losowego dla estymatorów metody najmniejszych kwadratów MNK są następujące:

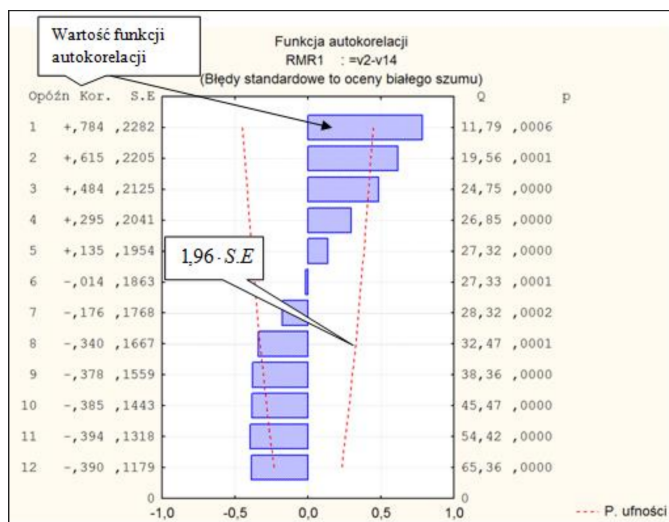
- jeśli wśród zmiennych objaśniających nie występują opóźnienia zmiennej objaśnianej, estymatory są nieobciążone, ale nieefektywne, natomiast estymatory wariancji są obciążone,
- jeśli wśród zmiennych objaśniających występują opóźnienia zmiennej objaśnianej, estymatory MNK nie są zgodne.

Na rysunku 3 przedstawiono zestawienie wartości funkcji autokorelacji dla 12 opóźnień oraz wartości graniczne, których nie powinna przekraczać. Wartości funkcji są przekroczone dla następujących opóźnień 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11 i 12. W prezentowanym przypadku należy stwierdzić, że hipoteza o występowaniu autokorelacji potwierdziła się. Nie można zatem uznać, że równanie, z którego pochodzi szereg resztowy, jest równaniem regresyjnym.

Statystyką badającą istotność kolejnych współczynników korelacji jest statystyka Ljunga-Boxa postaci (7) (Ljung i Box, 1978):

$$Q = t \cdot (t + 2) \cdot \sum_{k=1}^h \frac{\rho_k^2}{t - k} . \quad (7)$$

Statystyka Q ma rozkład χ^2 z k stopniami swobody. Wartości sprawdzianu większe od wartości krytycznych pozwalają na odrzucenie hipotezy zerowej zakładającej nieistotność autokorelacji rzędu k . W przeciwnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Jeśli $Q > \chi_{1-\alpha, k}^2$ to autokorelacja rzędu k jest istotna. Przykładowo dla opóźnienia $k = 1$ i $\alpha = 0,05$, χ_{kr}^2 obliczone przy użyciu opcji Kalkulator Prawdopodobieństwa programu STATISTICA wynosi



Rys. 3. Przedstawienie graficzne funkcji autokorelacji przykładowego modelu. Na wykresie wartości liczbowe w kolumnach od lewej to: opóźnienie szeregu, wartości funkcji autokorelacji dla kolejnych opóźnień, błędy standardowe funkcji autokorelacji, Q statystyka Ljung-Boxa, p – prawdopodobieństwo testowe statystyki Q . Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

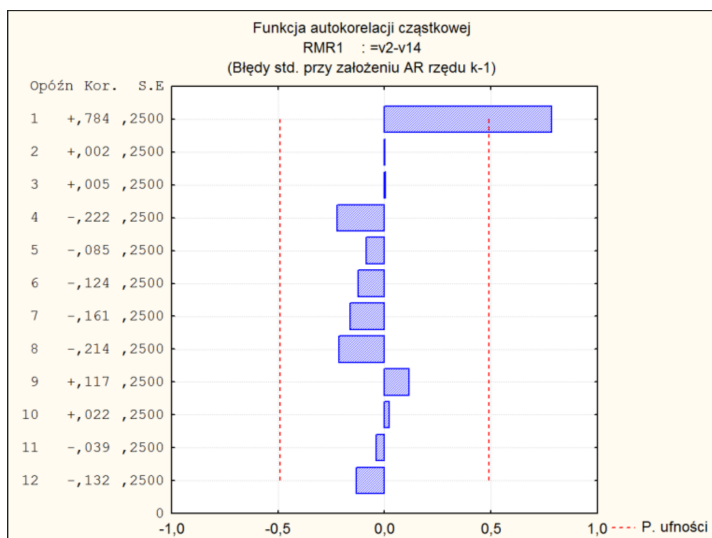
0,003932. Otrzymana wartość jest mniejsza od $Q = 11,79$. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej zakładającej nieistotność autokorelacji rzędu pierwszego.

Następnie należy sprawdzić hipotezę o występowaniu w szeregu resztowym autokorelacji cząstkowych. Funkcja autokorelacji cząstkowej ACF obliczana jest zgodnie ze wzorem (8):

$$ACF(k) = \frac{\frac{1}{n} \sum (e_t - \bar{e})(e_{t-k} - \bar{e})}{\sigma_t^2 + (\bar{e})^2} . \quad (8)$$

Poziom ufności oznaczony linią przerywaną na rys. 4 wyznaczany jest jako iloraz liczby 1,96 i odchylenia standardowego badanego szeregu. Jeśli wartość funkcji autokorelacji cząstkowej przekracza linię przerywaną, oznacza to, że należy przyjąć hipotezę o występowaniu w szeregu resztowym autokorelacji cząstkowych. Równanie otrzymane z obliczeń nie może być uznane za równanie regresji (Box i Pierce, 1970).

Z praktyki obliczeniowej wynika, że jeśli szereg resztowy równania regresji ma wysoką wartość funkcji autokorelacji cząstkowej lub/i autokorelacji cząstkowej reszt, przekraczającej dozwoloną wartość, to błąd prognozy jest wysoki. Mniej istotny wpływ na błąd prognozy ma występowanie autokorelacji dla opóźnienia powyżej piątego.



Rys. 4. Przedstawienie graficzne funkcji autokorelacji cząstkowej przykładowego modelu 1 metody MR. Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

11.2.6. PROGNOZOWANIE METODĄ REGRESJI WIELORAKIEJ MR (MULTIPLE REGRESSION)

Ogólnym celem regresji (termin ten został po raz pierwszy użyty przez Pearsona w 1908 roku) jest ilościowe ujęcie związków pomiędzy wieloma zmiennymi niezależnymi (objaśniającymi) a zmienną zależną (kryterialną, objaśnianą). Metoda pozwala na badanie związku pomiędzy wielkościami danych i przewidywanie na tej podstawie nieznanymi wartościami jednych wielkości na podstawie znanych wartości innych. Regresja, w której występuje więcej niż jedna zmienna objaśniająca, zwana jest regresją wieloraką (ang. multiple regression, MR).

Użycie regresji w praktyce sprowadza się do dwóch faz (Kornacki i Ćwik, 2005):

- **Konstruowanie modelu regresyjnego**, czyli funkcji opisującej, jak zależy wartość oczekiwana zmiennej objaśnianej od zmiennych objaśniających. Model konstruuje się tak, aby jak najlepiej pasował do danych z próby.
- **Stosowanie modelu** (tzw. scoring) – użycie wyliczonego modelu do danych, w których znamy tylko zmienne objaśniające, w celu wyznaczenia wartości oczekiwanej zmiennej objaśnianej.
- Najprostszym modelem regresji jest model liniowy, w którym zmienna objaśniana jest funkcją liniową zmiennych objaśniających i składnika losowego (Kot, Jakubowski i Sokołowski, 2007). Model regresji liniowej w zbiorowości generalnej przedstawia równanie (9):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \xi, \quad (9)$$

gdzie:

Y – zmienna zależna (objaśniana),

X_i – zmienna niezależna (objaśniająca),

β_0 – wyraz wolny regresji,

β_i – współczynnik regresji cząstkowej (parametry strukturalne modelu regresji),

ξ – składnik losowy (ksi).

Składnik losowy ξ powinien być zmienną losową podlegającą rozkładowi normalnemu o wartości przeciętnej równej zero i stałej wariancji (jest homoskedastyczny). Jeśli składnik losowy nie spełnia tych warunków, to równanie (9) nie jest równaniem regresji. Zatem podczas obliczeń istnieje konieczność sprawdzenia reszt.

Miarą wykorzystywaną do oceny dobroci dopasowania modelu regresyjnego do danych wejściowych jest współczynnik determinacji R^2 . Informuje on o tym, jaka część zmienności zmiennej objaśnianej została wyjaśniona przez model. Współczynnik determinacji opisuje tę część zmienności objaśnianej, która wynika z jej zależności od uwzględnionych w modelu zmiennych objaśniających. Współczynnik determinacji przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$.

Dopasowanie modelu jest tym lepsze, im wartość R^2 jest bliższa jedności. Wyraża się on wzorem (10):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (10)$$

gdzie:

R^2 – współczynnik determinacji,

y_i – zaobserwowana (empiryczna) wartość zmiennej Y ; wartość jaką zmienna Y przyjęła w obiekcie o numerze i ,

\hat{y}_i – teoretyczna wartość zmiennej Y , obliczona poprzez podstawienie do równania regresji wartości, jakie zmienne objaśniające przyjęły w obiekcie o numerze i ,

\bar{y} – średnia arytmetyczna wartości zmiennej Y z próby,

n – liczba obserwacji,

i – numer obserwacji.

Współczynnik determinacji jest wrażliwy na wprowadzanie dodatkowych zmiennych niezależnych do równania regresji. Jeżeli do modelu dodajemy nowe zmienne to R^2 ulega zwiększeniu, nawet jeżeli wpływ nowej zmiennej nie jest istotny statystycznie. Celem zneutralizowania tego efektu w modelach regresji wielorakiej zaleca się (Kot, Jakubowski i Sokołowski, 2007) stosowanie skorygowanego

współczynnika determinacji R_s^2 (11):

$$R_s^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \cdot \frac{n-1}{n-k-1}, \quad (11)$$

gdzie: k – liczba zmiennych niezależnych.

Do oceny dobroci dopasowania można wykorzystać pierwiastek kwadratowy współczynnika determinacji. Jest to współczynnik korelacji wielorakiej, który mierzy siłę łącznego wpływu wszystkich zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą.

Najbardziej istotne i jednocześnie decydujące o prawidłowości modelu regresji jest sprawdzenie wartości składnika losowego równania (9). Jeśli zostanie wykazane, że składnik losowy nie ma średniej zbliżonej do zera i jednakowej wariancji (nie jest homoskedastyczny), to nie ma podstaw do przyjęcia, że otrzymane równanie jest równaniem regresji. Możliwe jest występowanie takiej sytuacji, że skorygowany współczynnik determinacji R_s^2 jest zbliżony do wartości 1 (jesteśmy wówczas zadowoleni z otrzymanego równania regresji), natomiast okazuje się po wykonaniu obliczeń, że składnik losowy nie jest białym szumem i nie można wówczas uznać modelu za prawidłowy.

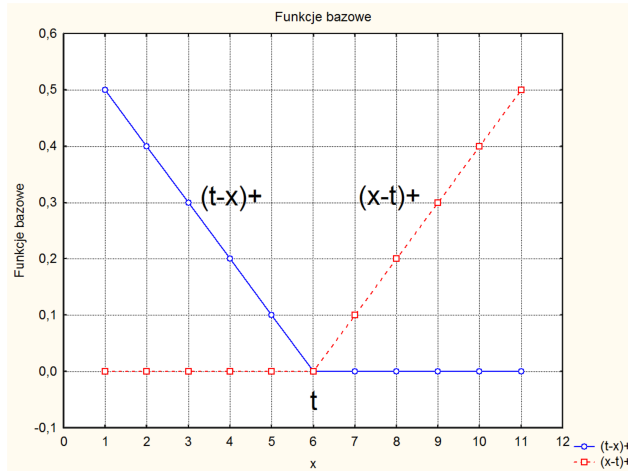
11.2.7. PROGNOZOWANIE METODĄ WIELOIMIENNEJ REGRESJI ADAPTACYJNEJ Z UŻYCIEM FUNKCJI SKLEJANYCH MARS (MULTIVARIATE ADAPTIVE REGRESSION SPLINES)

Multivariate Adaptive Regression Splines (MARSplines) w polskim tłumaczeniu znana jest jako wieloimienna regresja adaptacyjna z użyciem funkcji sklepanych (Fijorek, 2010) lub też składanych. Metoda została opracowana przez Friedmana (1991). Wykorzystywana jest do rozwiązywania problemów regresyjnych i klasyfikacyjnych, w których celem jest znalezienie wartości zmiennych wyjściowych na podstawie zmiennych wejściowych (zależnych, predykcyjnych). W metodzie nie istnieje konieczność przyjmowania założeń dotyczących funkcyjnych zależności pomiędzy zmiennymi zależnymi i niezależnymi. Na podstawie danych MARSplines generuje zbiór współczynników i funkcji bazowych, a następnie modeluje zależności regresyjne lub klasyfikacyjne. Przestrzeń wejściowa dzielona jest na obszary, w których określone są funkcje. Analizowany jest wpływ predyktorów oraz obserwacje danej zmiennej objaśniającej a obszar zmienności cechy dzielony jest na przedziały, w których ma ona różny wpływ na badane zjawisko. Jak opisuje Fijorek (2010) ogólny mechanizm działania MARSplines wyobrazić można sobie jako wielokrotną, odcinkową regresję liniową; granice odcinków (wyznaczone na

podstawie danych) określają „zakresy stosowalności” poszczególnych równań liniowych. Równania te tworzą krzywą składaną czyli zbiór zdefiniowanych lokalnie wielomianów stopnia pierwszego, które łączą się ze sobą w punktach zwanych węzłami. Funkcje te zwane są funkcjami bazowymi i służą do wyznaczania prognozy wartości zmiennej zależnej w funkcji zmiennych niezależnych. W metodzie istnieje możliwość uwzględnienia interakcji między zmiennymi. Opisywana jest ona przy pomocy iloczynu funkcji bazowych. Przykładowe funkcje bazowe przedstawiono na rysunku 5 i opisano zależnością (12).

$$(x - t)_+ = \max(0, x - t) = \begin{cases} x - t, & \text{dla } x > t, \\ 0, & \text{dla } x \leq t. \end{cases} \quad (12)$$

Znaczniki „+” za wyrażeniami $(t-x)$ i $(x-t)$ oznaczają, że do obliczeń używane są tylko wartości dodatnie funkcji. Zamiast wartości ujemnych do obliczeń przyjmuje się wartość zero. Alternatywnie stosuje się zapis $\max(0, t-x) = (t-x)_+$.



Rys. 5. Dwie funkcje bazowe $(t-x)_+$ i $(x-t)_+$ z parametrem t – węzłem funkcji bazowej.

Ogólne równanie MARSplines to ważona suma wybranych funkcji bazowych oraz iloczynów tych funkcji (13).

$$y = f(x) = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \beta_m h_m(x), \quad (13)$$

$$h_m(x) = \prod_{k=1}^q h_k(x, t), \quad (14)$$

$$h_k(x, t) = [t - x]_+^k, \quad (15)$$

gdzie:

x – zmienne predykcyjne,
 y – funkcja zmiennych predykcyjnych,
 β_0 – wyraz wolny,
 M – liczba składników modelu,
 β_m – wagi funkcji bazowych,
 $h_m(x)$ – funkcje bazowe,
 t_m – węzeł funkcji bazowej.

Parametry modelu znajdowane są za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

11.2.8. PROGNOZOWANIE METODĄ UOGÓLNIONYCH MODELI ADDYTYWNYCH GAM (GENERALIZED ADDITIVE METHODS)

Uogólnione modele addytywne GAM są implementacją technik rozwiniętych i spopularyzowanych przez Hastiego i Tibshirani (1990). Szczegółowy opis tych technik i algorytmów wykorzystywanych w celu dopasowania modeli można znaleźć również w Schimek (2000). Uogólnione modele addytywne są rozwinięciem i rozszerzeniem uogólnionych modeli liniowych. W przypadku uogólnionych modeli liniowych wartości przekształconej zmiennej zależnej przewidywane są na podstawie liniowej kombinacji zmiennych niezależnych (predyktorów). Przekształcenie jest określone przez funkcję wiążącą, ponadto w modelu możemy przyjąć różne rozkłady zmiennej zależnej. W przypadku uogólnionych modeli addytywnych zamiast kombinacji liniowej predyktorów, stosuje się nieparametryczną funkcję uzyskaną przez zastosowanie wygładzania do wykresu rozrzutu reszt cząstkowych (dla przekształconych wartości zmiennej zależnej).

W uogólnionym modelu addytywnym zakłada się, że związek pomiędzy zmiennymi ma postać (16):

$$Y = g(b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k) + e, \quad (16)$$

gdzie: e oznacza błąd, $g(\dots)$ jest pewną funkcją. Formalnie, funkcja odwrotna do $g(\dots)$ oznaczona $f(\dots)$ jest nazywana funkcją wiążącą (17), taką, że:

$$f(mi_y) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k, \quad (17)$$

gdzie mi_y oznacza wartość oczekiwaną y .

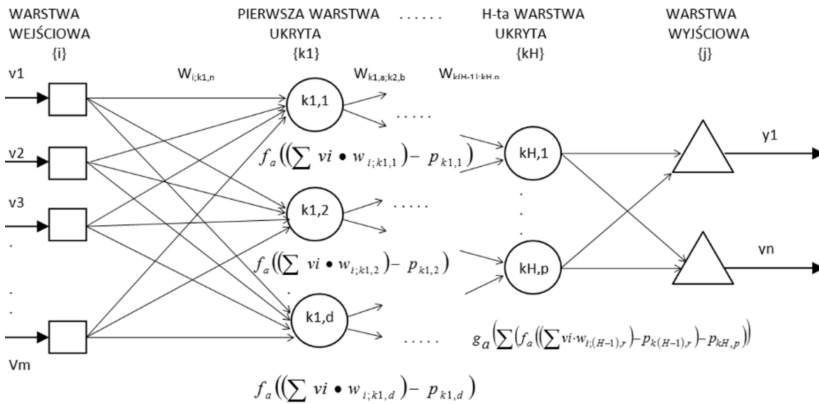
W zależności od zakładanego rozkładu zmiennej y można użyć różnych funkcji wiążących (McCullagh i Nelder, 1989). Najprostszymi funkcjami wiążącymi są funkcje: identycznościowa, logarytmiczna i potęgowa.

Metoda GAM w analizach procesów budowlanych wykazuje dużą skuteczność obliczeniową.

11.2.9. PROGNOZOWANIE METODĄ SZTUCZNYCH SIECI NEURONOWYCH

Sieci neuronowe są wyrafinowaną techniką modelowania, zdolną do odwzorowania nadzwyczaj złożonych funkcji (Tadeusiewicz, 2010). Sieć neuronowa to

rodzaj architektury systemu komputerowego. Polega on na przetwarzaniu danych przez neurony pogrupowane w warstwy. Odpowiednie wyniki uzyskuje się dzięki procesowi uczenia, który polega na modyfikowaniu wag tych neuronów, które są odpowiedzialne za błąd. Efektywność sieci neuronowych doceniana jest ze względu na możliwość nieliniowego modelowania zjawisk i procesów. Istnieje wiele typów i rodzajów sieci neuronowych, różniących się między sobą strukturą i zasadami działania. Najpopularniejsza obecnie architektura sieciowa związana jest z koncepcją wielowarstwowego perceptronu MLP. Koncepcja ta została opisana po raz pierwszy przez Rumelharta i McClellanda (1986). Schemat działania sieci neuronowej typu MLP przedstawiono na rysunku 6.

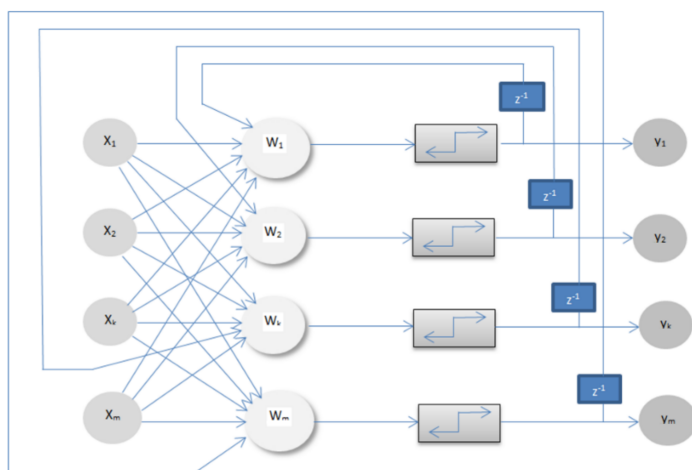


Rys. 6. Schemat działania sieci neuronowej typu MLP, gdzie: v – zmienne niezależne wejściowe, m – liczba zmiennych niezależnych, w – wagi obliczone przy wejściu do warstwy ukrytej neuronów, p – obliczona wartość progowa, f i g – funkcje aktywacji, H – liczba warstw ukrytych w perceptronie wielowarstwowym, d i p – ilość neuronów w kolejnych warstwach ukrytych, y – zmienne zależne, n – liczba neuronów wyjściowych. Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

W perceptronie wielowarstwowym każdy z neuronów realizuje pewną transformację liniową wektora wejściowego v_i (czyli zbioru wartości wprowadzanych do neuronu). Neurony te wyznaczają ważoną sumę wartości wejściowych, a następnie odejmują od tej sumy ustaloną wartość progową. Uzyskany rezultat, będący pewną kombinacją liniową sygnałów wejściowych, jest poddawany w sieci MLP działaniu nieliniowej funkcji aktywacji f_a – najczęściej o kształcie sigmoidy. Liniowa funkcja na wejściu neuronu powoduje, że perceptron wielowarstwowo rozwiązuje stawiane mu zadanie dzieląc przestrzeń sygnałów wejściowych przy użyciu hiperpłaszczyzn na rozłączne obszary przypisywane do różnych wartości sygnałów wyjściowych y_j .

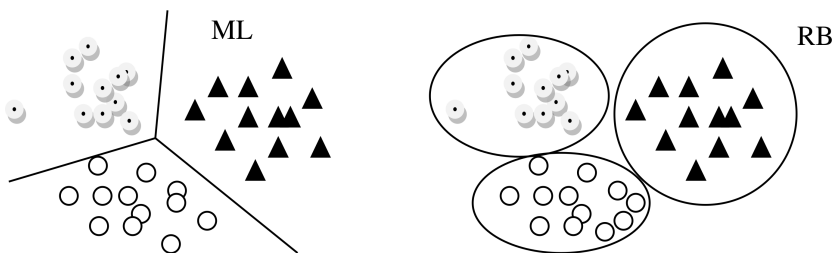
Innym popularnym modelem sieciowym jest sieć rekurencyjna RBF (Radial Basic Function). W tej sieci połączenia między neuronami stanowią graf z cyklami (obieg zamknięty) tzn. sygnały z warstwy wyjściowej sieci podawane są z powrotem do warstwy wejściowej. Wśród wielu różnych modeli rekurencyjnych

sztucznych sieci neuronowych wyróżnić można: sieć Hopfielda, układ gęsto połączonych ze sobą neuronów (każdy z każdym, ale bez połączeń zwrotnych) realizującą dynamikę gwarantującą zbieżność do preferowanych wzorców oraz maszynę Boltzmanną będącą modyfikacją sieci Hopfielda (pozwoliła na uczenie neuronów ukrytych i likwidację wzorców pasożytniczych kosztem zwiększenia czasu symulacji). Sygnały wyjściowe stanowią jednocześnie wektor wejściowy dla następnego cyklu). W sieci tej nie występuje zwykle sprzężenie zwrotne neuronu od własnego sygnału wyjściowego. Na rysunku 7 przedstawiony został model sieci rekurencyjnej z jedną ukrytą warstwą neuronów.



Rys. 7. Schemat działania sieci neuronowej typu RBF z jedną ukrytą warstwą neuronów.
Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

W dużym uproszczeniu różnicę pomiędzy sieciami MLP i RBF można przedstawić jak na rysunku 8.



Rys. 8. Schemat podziału przestrzeni sygnałów wejściowych w sieciach neuronowych typu MLP i RB. Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

Wykonując obliczenia metodą automatycznych sieci neuronowych jako wynik otrzymujemy tabelę z zestawieniem aktywnych sieci neuronowych oraz ich pa-

rametrów. Jako wynik obliczeń wybiera się zwykle pięć sieci charakteryzujących się najmniejszymi błędami uczenia, testowania i walidacji. Im wartości błędów są bliższe zeru, tym model sieciowy jest lepszy. Jakość uczenia, testowania i walidacji jest tym lepsza im jest bliższa jedności. Aby uzyskać wartość błędu *MAPE* mniejszą niż 3%, jakość uczenia, testowania i walidacji muszą wykazywać się wartościami zbliżonymi do 0,99 (oczywiście najlepiej byłoby, gdyby miały wartość jeden, ale jest to bardzo mało prawdopodobne, szczególnie w odniesieniu do danych uzyskiwanych z pomiarów).

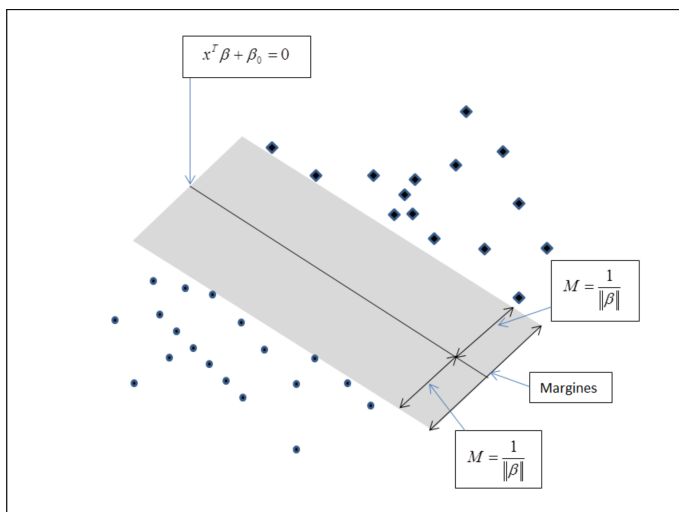
Zwykle uzyskuje się dobre wyniki obliczeń metodą sieci neuronowych, jeśli mamy do dyspozycji około sto przypadków dla każdej zmiennej. Wadą metody jest brak wygenerowanego wzoru regresji. Wykonując obliczenia prognostyczne musimy wprowadzać nowe dane (dla nowego przypadku) bezpośrednio do wytypowanej sieci. Zatem nowe obliczenia może wykonywać tylko osoba, która posiada wszystkie dane poprzednie oraz sieć neuronową. Ogranicza to uniwersalność metody oraz przekazywanie wyników w postaci wzoru regresyjnego do szerokiego stosowania.

11.2.10. PROGNOZOWANIE METODĄ WEKTORÓW NOŚNYCH SVM (SUPPORT VECTOR MACHINE)

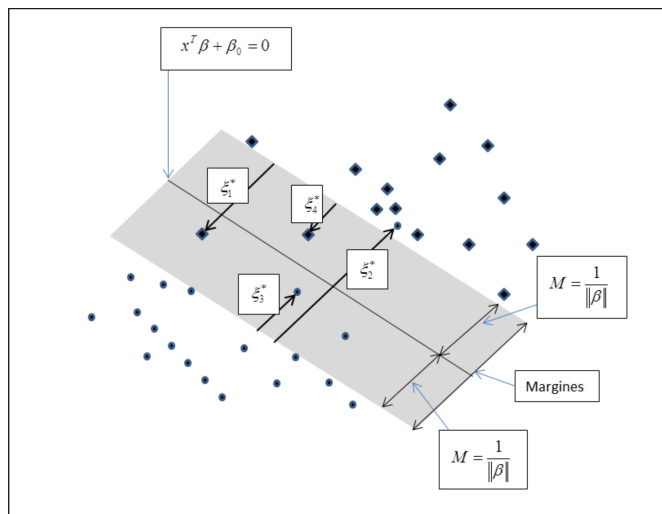
Metoda wektorów nośnych (SVM) stosowana jest do rozwiązywania problemów regresyjnych i klasyfikacyjnych. Polega na budowaniu nieliniowych granic decyzyjnych, oddzielających obszary w przestrzeni predyktorów, odpowiadające różnym wartościom zmiennej zależnej. Ze względu na właściwości przestrzeni cech (predyktorów) metoda SVM wykazuje dużą elastyczność przy rozwiązywaniu zadań klasyfikacyjnych i regresyjnych o różnej złożoności. Czasami stosuje się również nazwy: metoda wektorów wspierających i metoda wektorów podpierających. SVM stosowana była między innymi przez: An (2007), Tserng (2011) wraz z zespołami do rozwiązywania różnych zagadnień inżynierskich, takich jak: obliczanie kosztów przedsięwzięcia, ryzyka zatrudniania podwykonawców, elementów zarządzania w budownictwie, zużycia energii elektrycznej, prekwalifikacji podwykonawców, aerodynamicznej analizy konstrukcji mostów, wyboru technologii i materiałów budowlanych i innych. W najprostszej formie działanie algorytmu SVM polega na znalezieniu hiperpłaszczyzny rozdzielającej z maksymalnym marginesem punkty należące do dwóch klas. Zobrazowano to na rysunkach 9 i 10 dla przypadków separowalnych i nieseparowalnych.

W regresji SVM poszukujemy zależności funkcyjnej zmiennej zależnej y od zbioru zmiennych niezależnych x . Przyjmuje się, że zależność ta jest typu deterministycznego (18), z pewnym dodatkiem losowego szumu:

$$y = f(x) + \text{szum}. \quad (18)$$



Rys. 9. Przypadek separowalny. Maksymalny margines hiperprzestrzeni oddziela grupy przypadków. Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).



Rys. 10. Przypadek nieseparowalny. ζ_i^* – odległość punktów znajdujących się po „złej stronie” od brzegu marginesu, $\|\beta\|$ norma wektora $\|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^n (\beta_i)^2}$. Źródło: opracowanie własne (Rogalska, 2016).

Podstawowym zadaniem jest znalezienie postaci funkcji jądrowej f , która powinna możliwie najlepiej podawać wartość zmiennej zależnej dla nowych przypadków, których model SVM nie „widział” wcześniej. Zadanie to rozwiązuje się

uczając model SVM za pomocą próby przypadków, zwanej próbą uczącą. Podobnie jak przy klasyfikacji, proces ten polega na sekwencyjnym minimalizowaniu pewnej funkcji błędu. Stosuje się dwa typy tej funkcji i, odpowiednio do tego, można wyróżnić dwa typy regresji SVM: typ pierwszy i drugi. Stosując regresję SVM typu 1 minimalizuje się funkcję błędu następującej postaci (19):

$$\frac{1}{2}w^T w + C \sum_{i=1}^N \zeta_i + C \sum_{i=1}^N \zeta_i^*, \quad (19)$$

gdzie:

C – stała, nazywana pojemnością,

w – wektor współczynników,

b – stała,

N – liczba przypadków,

φ – funkcja jądrowa,

$\zeta_i - \zeta_i^*/M$,

ζ_i^* – odległość punktów znajdujących się po „złej stronie” od brzegu marginesu,

M – margines hiperprzestrzeni (rys. 10).

Stosując regresję SVM typu 2 minimalizuje się funkcję błędu następującej postaci (20):

$$\frac{1}{2}w^T w - \left(\nu\varepsilon + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta_i + \zeta_i^\varphi) \right). \quad (20)$$

Funkcje jądrowe wywodzą się z badań liniowych przestrzeni wektorowych Hilberta, Banacha. Stosuje się kilka typów funkcji jądrowych w modelu SVM: liniową, wielomianową, radialne funkcje bazowe (RBF) i funkcję sigmoidalną (21):

$$\varphi = \begin{cases} x_i \cdot x_j & \text{Liniowa,} \\ (\gamma x_i x_j + c)^\gamma & \text{Wielomian,} \\ \exp(-\gamma|x_i - x_j|^2) & \text{RBF,} \\ \tanh(\gamma x_i x_j + c) & \text{Sigmoidalna.} \end{cases} \quad (21)$$

Funkcja RBF jest najczęściej wybierana jako funkcja jądrowa w SVM, głównie ze względu na ograniczony zasięg w polu zmiennych x .

11.3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Celem przeprowadzenia obliczeń jest określenie wzoru regresyjnego, który pozwoli na wycenę ceny netto 1 m² powierzchni użytkowej, nowo wznoszonych domów jednorodzinnych w województwie lubelskim.

Poniżej przedstawiono procedurę wykonania wyceny ceny netto 1 m² nowo wznoszonych domów jednorodzinnych w województwie lubelskim.

11.3.1. OKREŚLENIE ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH I ZEBRANIE DANYCH

Zmienną zależną jest v_1 – cena netto 1 m² nowo wznoszonego domu jednorodzinnego w województwie lubelskim. Dane do obliczeń, zestawione w tabeli 1,

Tabela 1.

Wykaz zmiennych użytych do obliczeń w programie STATISTICA. Źródło: opracowanie własne.

Lp	Zmienna	Opis zmiennej	Uwagi	
1	v_1	Cena netto 1m ²	[zł/m ²]	
2	v_2	Powierzchnia użytkowa	[m ²]	
3	v_3	Powierzchnia zabudowy	[m ²]	
4	v_4	Powierzchnia garażu	[m ²]	
5	v_5	Wysokość	[m]	
6	v_6	Nachylenie dachu	[°]	
7	v_7	Kubatura netto	[m ³]	
8	v_8	Ściany zewnętrzne	zmienna lingwistyczna	
9	v_9	KOD Ściany zewnętrzne	beton komórkowy 40 cm	101
			pustaki ceramiczne 30 cm	102
			beton komórkowy 48 cm	103
			pustaki ceramiczne 44 cm	104
			pustaki styropianowe 40 cm	105
			beton komórkowy 36,5 cm	106
			beton komórkowy 24 cm	107
pustaki ceramiczne 25 cm	108			
10	v_{10}	Strop	zmienna lingwistyczna	
11	v_{11}	KOD Strop	żelbetowy monolityczny	101
			drewniany	102
			gęstożebrowy	103
			beton komórkowy zbrojony	104
12	v_{12}	Pokrycie dachu	zmienna lingwistyczna	
13	v_{13}	KOD Pokrycie dachu	dachówka ceramiczna	101
			blacha falista	102
			blacha trapezowa	103
			blacha tytan-cynk	104
			żwir	105
papa bitumiczna	106			
14	v_{14}	Ogrzewanie	zmienna lingwistyczna	
15	v_{15}	KOD Ogrzewanie	gaz	101
			pompa ciepła, kolektory słoneczne	102
			gaz, kolektory słoneczne	103
			pompa ciepła	104
16	v_{16}	$(\text{Log}_2(v_2) - 3,4)^{5,8}$	przekształcenie zmiennej v_2 – Powierzchnia użytkowa	
17	v_{17}	$(\text{Log}_2(v_3))^4$	przekształcenie zmiennej v_3 – Powierzchnia zabudowy	
18	v_{18}	$(\text{Log}_2(v_4) + 1,9)^{4,2}$	przekształcenie zmiennej v_4 – Powierzchnia garażu	
19	v_{19}	$(\text{Log}(v_5))^{10,5}$	przekształcenie zmiennej v_5 – Wysokość	
20	v_{20}	$(\text{Log}_2(v_7) - 2,5)^{4,2}$	przekształcenie zmiennej v_7 – Kubatura netto	

pozyskano od przedsiębiorców realizujących budowę domów jednorodzinnych na terenie województwa lubelskiego. Analizowano 116 domów. Zmienne v_2 do v_7 to dane liczbowe, $v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$ to zmienne lingwistyczne, $v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}$ to zmienne kodowane wartości lingwistycznych, zmienne v_{16} do v_{20} to zmienne będące przekształceniami zmiennych niezależnych liczbowych (otrzymane w późniejszym etapie obliczeń metodą prób i błędów dopasowania przekształceń generujących jak najmniejszy błąd *MAPE*). Zmienne zależne wybierano ze względu na przewidywany istotny możliwy wpływ predyktora na wartość zmiennej zależnej oraz ze względu na możliwość pozyskania wszystkich danych od różnych wykonawców. Na rysunku 11 przedstawiono fragment arkusza kalkulacyjnego w programie STATISTICA.

L.p.	v_1 Cena netto	v_2 Pow. użytkowa	v_3 Pow. zabudowy	v_4 Pow. garażu	v_5 Wysokość	v_6 Nachylenie dachu	v_7 Kubatura netto	v_8 Ściany zewn.	v_9 KOD Ściany zewn.	v_{10} Strop	v_{11} KOD Strop	v_{12} Pokrycie dachu	v_{13} KOD Pokrycie dachu	v_{14} Ogrzewanie	v_{15} KOD Ogrzewanie	v_{16} (Log2(v2)-3,4)^5,8	v_{17} (Log2(v3))^4	v_{18} (Log2(v4)+1,9)^4,2	v_{19} (Log(v5))^10,5	v_{20} (Log2(v7)-2,9)^4,2
1	2 288	137,56	113,28	18,15	8,20	38	465,90	beton komórkowy 40	101	D	102	DC	101	G	101	1987,17160	2187,84047	2187,18858	2487,57847	2374,823437
2	2 340	123,82	114,00	19,50	8,48	48	419,25	beton komórkowy 40	101	BKZ	104	BT	101	G	101	1552,95933	2179,80582	2107,38222	2013,82305	2130,244319
3	2 370	161,54	169,89	23,54	8,55	42	505,84	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	141,4542035	2381,76523	2140,20261	2032,66052	2157,55209
4	2 388	183,91	174,52	23,10	8,77	45	562,53	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	3959,55458	3075,97220	2470,00417	3432,69750	2987,815698
5	2 397	126,50	110,00	23,73	8,53	42	399,60	putaki ceramiczne 44	104	G	103	DC	101	G	101	1600,03138	2114,78443	2543,394487	2069,070858	2046,556748
6	2 405	164,01	158,71	17,04	8,60	40	575,88	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	2918,30343	2855,80620	1842,39000	3121,331418	2892,091887
7	2 408	140,20	135,00	20,84	8,55	45	505,00	putaki ceramiczne 30	102	G	103	DC	101	G, K.S	103	2380,64406	2058,139512	2227,19742	3033,653775	2582,44359
8	2 410	171,17	163,80	24,00	7,73	42	505,85	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	3215,32420	2714,952377	2140,20261	2032,66052	2157,55209
9	2 410	136,98	122,18	19,14	8,07	40	513,70	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	1968,27801	2310,206532	2066,160031	2277,746438	2603,620056
10	2 412	132,34	127,12	18,66	8,57	45	380,00	beton komórkowy 40	101	BKZ	104	DC	101	G	101	1819,66216	2387,37881	2017,97209	3068,515038	1646,524630
11	2 426	118,96	120,00	17,92	7,86	40	381,25	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	1416,32224	2275,780183	1938,375102	1746,600322	1953,315252
12	2 429	228,47	228,00	34,82	8,90	38	768,00	beton komórkowy 48	103	ZM	101	BTC	104	G	101	5885,51225	3784,339882	3540,004722	3489,809131	3727,500711
13	2 435	129,94	118,15	19,28	8,98	42	418,80	putaki ceramiczne 44	104	ZM	101	BT	103	G	101	1713,68028	2214,400249	1977,195891	3285,280399	2142,895995
14	2 443	154,05	142,65	20,83	9,00	45	485,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	2552,32942	2622,789122	2246,965142	3887,60119	2370,454272
15	2 449	122,57	124,90	20,34	8,94	38	472,24	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	1521,99218	2352,838477	2165,8399	2884,188003	4052,536305
16	2 453	203,20	208,28	36,00	9,50	30	707,10	putaki ceramiczne 30	102	ZM	101	DC	101	G, K.S	103	4514,09320	3481,550234	3604,385308	5018,039165	3471,129698
17	2 498	219,58	191,00	26,80	9,06	40	812,00	beton komórkowy 48	103	ZM	101	BTC	104	G, K.S	103	5083,36227	3206,700997	3037,827209	4012,831254	3908,560753
18	2 487	121,53	133,40	17,82	7,90	40	441,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	1491,96909	2170,109678	1905,86205	2045,371609	2353,077892
19	2 481	150,00	149,52	21,60	8,30	42	545,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	BT	103	G	101	2732,00677	2685,724272	2176,482838	2620,988286	2750,109684
20	2 489	124,68	115,07	18,18	7,91	40	460,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	1584,47912	2197,055072	1968,430025	2056,554507	2048,577387
21	2 493	129,92	128,40	25,42	8,20	45	400,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	1743,97052	2380,839912	2111,372872	2487,578487	2297,291912
22	2 498	193,94	191,82	18,92	7,90	40	359,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	779,89716	1976,751811	2015,860291	1918,811055	1836,004928
23	2 500	194,87	139,70	38,13	8,95	38	551,00	putaki ceramiczne 40	105	G	103	DC	101	G	101	2843,13748	2978,86839	3878,838943	3951,949539	3524,010117
24	2 500	109,58	102,30	21,97	8,54	42	402,00	putaki ceramiczne 44	104	G	103	DC	101	G	101	1160,40200	1987,18203	2384,787512	1916,327657	2056,673094
25	2 506	154,55	161,26	23,93	9,00	42	469,00	putaki ceramiczne 30	102	ZM	101	DC	101	G, K.S	103	2570,27378	2891,699752	2563,455031	3887,60119	2386,850868
26	2 506	190,61	161,10	34,13	7,95	45	617,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	BTC	104	G	101	3976,43448	2889,851332	3528,408428	2111,887877	3077,779611
27	2 507	66,54	63,74	19,53	7,95	40	334,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	BTC	104	G	101	817,55528	1841,291032	2110,597854	1738,969057	1708,170247
28	2 507	134,55	151,00	32,08	8,30	42	500,00	putaki ceramiczne 44	104	G	103	DC	101	G	101	1803,45039	2745,183952	3424,800291	2820,988286	2338,868862
29	2 507	103,89	131,05	16,75	7,20	37	400,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	1015,18655	2447,18851	1910,910199	1262,783187	2048,577387
30	2 512	280,96	298,10	40,70	8,85	35	991,55	beton komórkowy 48	103	ZM	101	BTC	104	P	104	8249,78215	4243,181391	4098,72812	5932,458035	4121,330907
31	2 513	127,56	117,50	18,00	8,20	40	467,88	beton komórkowy 48	103	ZM	101	BL	102	G	101	1671,38384	2256,611694	1947,017994	3301,979818	2338,661019
32	2 518	167,65	164,95	21,85	8,90	40	598,00	putaki ceramiczne 44	104	ZM	101	DC	101	G	101	2882,56453	2602,198754	2331,902237	3084,997138	2348,064941
33	2 519	208,83	191,00	35,83	8,53	30	734,00	putaki ceramiczne 44	104	ZM	101	DC	101	G	101	4781,43287	3206,700997	3979,421066	5002,320124	3985,295768
34	2 528	99,13	128,40	20,10	7,80	40	310,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	900,22095	2376,819684	2170,868891	1918,811055	1600,782177
35	2 529	140,37	148,00	22,36	8,77	41	402,00	beton komórkowy 48	103	ZM	101	DC	101	G, K.S	103	2079,68532	2672,225222	2404,700484	3432,697539	2058,673094
36	2 538	137,58	160,10	21,84	8,90	40	510,00	putaki ceramiczne 30	102	ZM	101	DC	101	G	101	1987,85394	2876,615242	2351,440084	3894,997138	2587,552282
37	2 539	182,23	185,32	37,08	8,88	35	593,00	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G, K.S	103	2994,23037	3221,914858	3788,854408	5475,17825	3958,041913
38	2 545	118,10	110,00	19,80	8,25	40	417,00	putaki ceramiczne 44	104	G	103	DC	101	G	101	1339,33985	2114,78443	2138,990978	2543,464243	2133,993892
39	2 558	130,41	182,68	21,42	7,28	38	503,77	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	2047,89799	3190,37153	2308,198817	1330,918568	2556,056946
40	2 562	130,50	121,05	18,80	8,33	42	487,00	putaki ceramiczne 30	102	ZM	101	BL	102	G	101	1784,79974	2292,390653	2032,944445	2868,288757	2380,160381
41	2 566	118,68	117,23	22,93	9,14	41	441,58	beton komórkowy 48	103	ZM	101	DC	101	G, K.S	103	1393,02962	2231,997683	2462,899778	4194,128229	2295,943887
42	2 576	98,94	118,52	18,59	8,18	40	307,52	putaki ceramiczne 30	102	ZM	101	DC	101	G	101	874,74927	2220,388035	2010,478768	2437,617371	1957,510098
43	2 579	121,77	133,55	25,20	8,84	42	441,91	putaki ceramiczne 30	102	ZM	101	DC	101	G	101	1488,58784	2486,124204	2886,099109	3568,984829	2227,55919
44	2 582	141,51	172,13	36,00	8,20	42	460,28	beton komórkowy 40	101	ZM	101	DC	101	G	101	2117,67480	3043,24327	3604,385308	2487,578487	2347,502377
45	2 583	118,36	133,70	21,53	8,45	42	475,00	putaki ceramiczne 30	102	ZM	101	DC	101	G	101	1400,38889	2488,408473	2319,523892	2863,468824	2418,870928

Rys. 11. Fragment arkusza kalkulacyjnego programu obliczeniowego STATISTICA.

Źródło: opracowanie własne.

11.3.2. SPRAWDZENIE NORMALNOŚCI ROZKŁADÓW

W celu weryfikacji hipotezy o normalności rozkładów danych, wykonano test Shapiro-Wilka. Test wykonano dla wszystkich 116 przypadków. Z tablicy odczytano wartość krytyczną testu $w_{kr} = 0,964$ dla $n = 116$ przypadków i dla $\alpha = 0,05$. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 2.

Na podstawie wyników testu Shapiro-Wilka stwierdzono, że jedynie w przypadku zmiennej zależnej v_5 wartość $w > w_{kr}$. Dla tej zmiennej zależnej można

Zestawienie wartości testu Shapiro-Wilka. Źródło: opracowanie własne.

Zmienne	Test Shapiro-Wilka – wartość „w”
Cena netto 1m ²	0,88633
Powierzchnia użytkowa	0,94368
Powierzchnia zabudowy	0,93770
Powierzchnia garażu	0,78234
Wysokość	0,96415
Nachylenie dachu	0,58677
Kubatura netto	0,90695
KOD Ściany zewnętrzne	0,86508
KOD Strop	0,57522
KOD Pokrycie dachu	0,58554
KOD Ogrzewanie	0,56789
$(\text{Log}_2(v_2) - 3,4)^{5,8}$	0,88991
$(\text{Log}_2(v_3))^{4,4}$	0,95597
$(\text{Log}_2(v_4) + 1,9)^{4,2}$	0,83638
$(\text{Log}(v_5))^{10,5}$	0,84159
$(\text{Log}_2(v_7) - 2,5)^{4,2}$	0,93459

założyć hipotezę o rozkładzie normalnym. Dla pozostałych zmiennych zależnych wartość $w < w_{kr}$, co oznacza, że w przypadku tych zmiennych istnieją argumenty do odrzucenia hipotezy o rozkładzie normalnym. Analiza ta pozwala stwierdzić, że należało będzie zastosować zmienne przekształcone funkcyjnie oraz zaawansowane funkcje wiążące.

11.3.3. ANALIZA KORELACJI ZMIENNYCH LINIOWYCH

W celu wykonania analizy korelacji liniowych wykorzystano zmienne zależne ilościowe wraz z kodami przyporządkowanymi do zmiennych jakościowych. Po analizie korelacji liniowych stwierdzono, że korelacja zachodzi między zmiennymi: powierzchnia zabudowy, powierzchnia użytkowa i kubatura netto. Można się spodziewać, że zmienne te nie będą mogły być jednocześnie predyktorami w metodzie regresji wielorakiej.

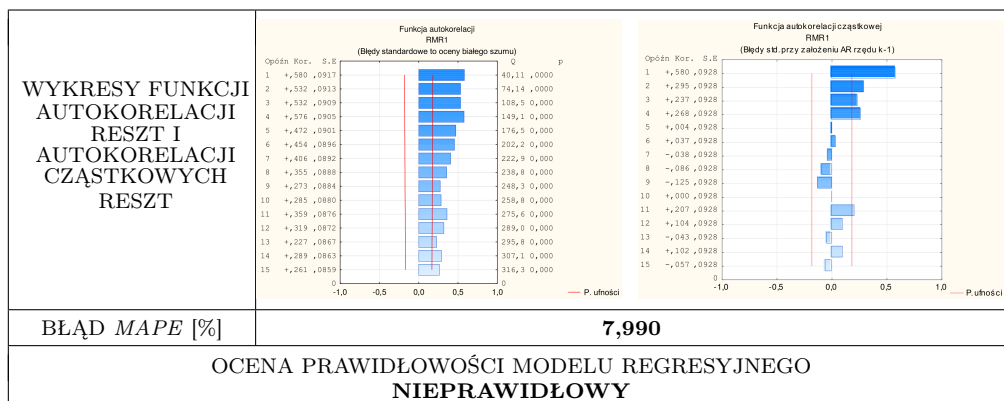
11.3.4. PROGNOZOWANIE METODĄ REGRESJI WIELORAKIEJ

Obliczenia wykonano dla 3 modeli MR1, MR2, MR3 metodą regresji wielorakiej. Modele różniły się predyktorami. Stwierdzono brak prawidłowości predykcji we wszystkich modelach ze względu na występowanie funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej reszt. W tabeli 3 zestawiono wyniki obliczeń modelu M1 obliczonego metodą regresji wielorakiej.

Tabela 3.

Zestawienie wyników obliczeń modelu MR1 ($v_1; v_2, v_4, v_6, v_7, v_9$) metodą regresji wielorakiej.
Źródło: opracowanie własne.

METODA OBLICZEŃ I MODEL REGRESYJNY	MR1 ($v_1; v_2, v_4, v_6, v_7, v_9$)						
ZMIENNA ZALEŻNA	v_1						
ZMIENNE NIEZALEŻNE	v_2, v_4, v_6, v_7, v_9						
PODSUMOWANIE REGRESJI	N=116	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: Cena netto 1 m ² $R = ,66224847$ $R^2 = ,43857304$ Popraw. R2 = ,41305363 $F(5,110) = 17,186$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 336,87					
		b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(110)	p
	W. wolny			-2492,77293	1895,06677	-1,31540	0,19111
	Pow. użytkowa	-0,82489	0,17359	-8,11819	1,70837	-4,75202	0,00001
	Pow. garażu	0,29055	0,10427	11,02868	3,5784	2,78654	0,00628
	Nachylenie dachu	-0,32549	0,08083	-12,45971	3,09410	-4,02692	0,00010
	Kubatura netto	0,78556	0,18640	1,78503	0,42357	4,21428	0,00005
	KOD Ściany zewn.	0,22394	0,07277	55,82831	18,14059	3,07753	0,00264
WZÓR REGRESYJNY	MR1 ($v_1; v_2, v_4, v_6, v_7, v_9$) = -2492,77293 - 8,11819*Pow. użytkowa + 11,02868*Pow. garażu - 12,45971*Nachylenie dachu + 1,78503*Kubatura netto + 55,82831*KOD Ściany zewn.						
WYKRES WARTOŚCI RZECZYWISTYCH I PROGNOZOWANYCH	<p>Linijowy wiele zmiennych MR1 ($v_1; v_2, v_4, v_6, v_7, v_9$)</p> <p>— Cena netto 1m2 — MR1</p>						



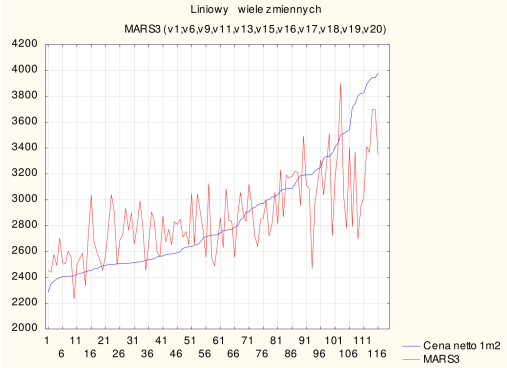
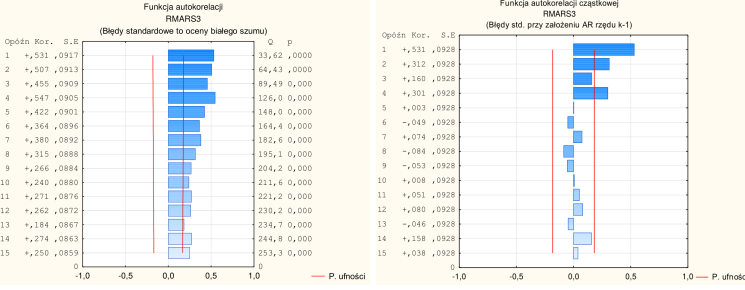
11.3.5. PROGNOZOWANIE METODĄ WIELOIMIENNEJ REGRESJI ADAPTACYJNEJ Z UŻYCIEM FUNKCJI SKLEJANYCH

Obliczenia wykonano dla 3 modeli MARS1, MARS2, MARS3 metodą wieloimiennej regresji adaptacyjnej z użyciem funkcji sklejaných. Modele różniły się predyktorami. Stwierdzono brak prawidłowości predykcji we wszystkich modelach ze względu na występowanie funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej reszt. W tabeli 4 zestawiono wyniki obliczeń modelu MARS3.

Tabela 4.

Zestawienie wyników obliczeń modelu MARS3 ($v_1; v_6, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$) metodą wieloimiennej regresji adaptacyjnej z użyciem funkcji sklejaných. Źródło: opracowanie własne.

METODA OBLICZEŃ I MODEL REGRESYJNY	MARS3 ($v_1; v_6, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$)	
ZMIENNA ZALEŻNA	v_1	
ZMIENNE NIEZALEŻNE	$v_6, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$	
PREDYKTORY	$v_6, v_9, v_{16}, v_{18}, v_{20}$	
PODSUMOWANIE REGRESJI	Zależnych	Liczba odwołań do każdego predyktora. Ile razy każdy predyktor był użyty Odwołania (do funkcji bazowej)
	Nachylenie dachu	1
	KOD Ściany zewn.	1
	KOD Strop	0
	KOD Pokrycie dachu	0
	KOD Ogrzewanie	0
	$(\text{Log}_2(v_2) - 3,4)^{5,8}$	2
	$(\text{Log}_2(v_3))^{4,4}$	0
	$(\text{Log}_2(v_4) + 1,9)^{4,2}$	1
	$(\text{Log}(v_5))^{10,5}$	0
$(\text{Log}_2(v_7) - 2,5)^{4,2}$	3	

WZÓR REGRESYJNY	<p>MARS3 ($v_1; v_6, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$) = $2736,645 - 0,189 \cdot \max(0; 3449,229 - ((\log_2(v_4) + 1,9)^{4,2})) + 58,805 \cdot \max(0; \text{KOD Ściany zewn.} - 101,000) - 12,266 \cdot \max(0; \text{Nachylenie dachu} - 2,000) - 0,147 \cdot \max(0; ((\log_2(v_2) - 3,4)^{5,8})) - 1902,701 + 0,531 \cdot \max(0; 1902,701 - ((\log_2(v_2) - 3,4)^{5,8})) + 0,471 \cdot \max(0; ((\log_2(v_7) - 2,5)^{4,2})) - 1418,740 + 1,877 \cdot \max(0; ((\log_2(v_7) - 2,5)^{4,2})) - 3727,501 - 1,565 \cdot \max(0; ((\log_2(v_7) - 2,5)^{4,2}) - 3471,127)$</p>
WYKRES WARTOŚCI RZECZYWISTYCH I PROGNOZOWANYCH	
WYKRESY FUNKCJI AUTOKORELACJI RESZT I AUTOKORELACJI CZĄSTKOWYCH RESZT	
BŁĄD MAPE [%]	7,936
OCENA PRAWDIWOŚCI MODELU REGRESYJNEGO NIEPRAWIŁOWY	

11.3.6. PROGNOZOWANIE METODĄ UOGÓLNIONYCH MODELI ADDYTYWNYCH

Obliczenia wykonano dla 3 modeli GAM1, GAM2, GAM3 metodą uogólnionych modeli addytywnych. Modele różniły się między sobą zastosowanymi predyktorami. Stwierdzono brak prawidłowości predykcji we wszystkich modelach ze względu na występowanie funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej reszt. W tabeli 5 zestawiono wyniki obliczeń modelu GAM3.

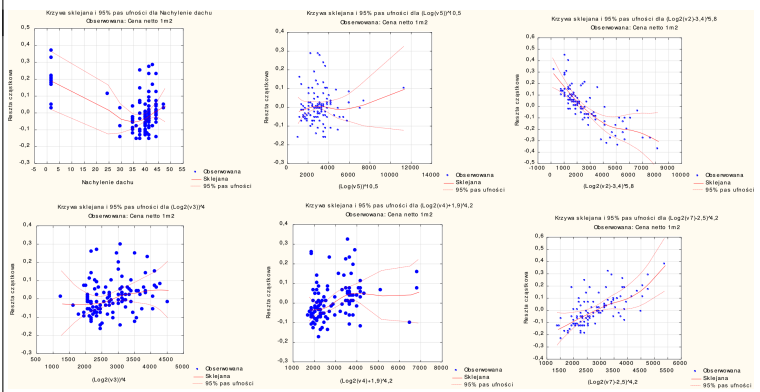
Tabela 5.

Zestawienie wyników obliczeń modelu GAM3 ($v_1; v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$) metodą uogólnionych modeli addytywnych. Źródło: opracowanie własne.

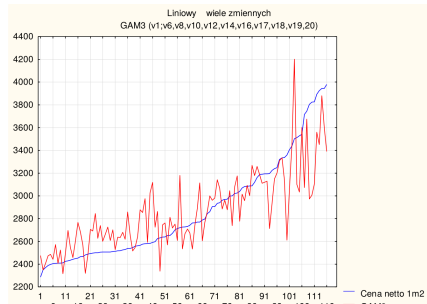
METODA OBLICZEŃ I MODEL REGRESYJNY	GAM3 ($v_1; v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$)						
ZMIENNA ZALEŻNA	v_1						
ZMIENNE NIEZALEŻNE	$v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$						
PREDYKTORY	$v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$						
PODSUMOWANIE REGRESJI	Podsumowanie dopasowania Obserwowana: Cena netto 1 m ² Rozkład: Gamma; Funkcja wiążąca: Log						
		Indeks zmiennej	Stopnie swobody	GAM współcz.	Błąd standar- dowy	Standar. wyniku	Nieliniowe p-wartość
	w. wolny	0	1,000000	7,741397	0,126197	61,34375	
	$(\text{Log}_2(v_2) - 3,4)^{5,8}$	1	3,998625	-0,000076	0,000019	-3,97619	0,001961
	$(\text{Log}_2(v_3))^{4,2}$	2	3,994589	0,000041	0,000034	1,20234	0,804987
	$(\text{Log}_2(v_4) + 1,9)^{4,2}$	3	4,004265	0,000032	0,000016	1,95610	0,301326
	$(\text{Log}(v_5))^{10,5}$	4	4,001974	0,000005	0,000009	0,48629	0,792527
	$(\text{Log}_2(v_7) - 2,5)^{4,2}$	5	4,005243	0,000108	0,000038	2,84729	0,257590
	Nachylenie dachu	6	4,000660	-0,004269	0,002459	-1,73624	0,002891
	Ściany zewn. (101)	7	1,000000	0,092798	0,033570	2,76436	
	Ściany zewn. (102)	7	1,000000	0,063516	0,039445	1,61023	
	Ściany zewn. (103)	7	1,000000	0,064153	0,042904	1,49528	
	Ściany zewn. (104)	7	1,000000	0,210784	0,053048	3,97349	
	Ściany zewn. (105)	7	1,000000	0,043039	0,070607	0,60955	
	Ściany zewn. (106)	7	1,000000	0,174963	0,115273	1,51782	
Ściany zewn. (107)	7	1,000000	0,143679	0,091174	1,57588		

PODSUMOWANIE REGRESJI	Strop (101)	7	1,000000	0,019458	0,067334	0,28898	
	Strop (102)	8	1,000000	-0,100215	0,047497	-2,10991	
	Strop (103)	8	1,000000	-0,089150	0,059910	-1,48805	
	Pokrycie dachu (101)	8	1,000000	-0,075176	0,053196	-1,41318	
	Pokrycie dachu (102)	9	1,000000	-0,062518	0,062784	-0,99577	
	Pokrycie dachu (103)	9	1,000000	0,013692	0,050295	0,27224	
	Pokrycie dachu (104)	9	1,000000	0,053287	0,115581	0,46104	
	Pokrycie dachu (105)	9	1,000000	-0,033120	0,119783	-0,27650	
	Ogrzewanie (101)	9	1,000000	-0,020735	0,186440	-0,11122	
	Ogrzewanie (102)	10	1,000000	0,012766	0,038003	0,33593	
	Ogrzewanie (103)	10	1,000000	0,011933	0,061698	0,19342	
WZÓR REGRESYJNY	<p>GAM3 $(v1; v6, v8, v10, v12, v14, v16, v17, v18, v19, v20) = e^{(7,741 - 0,00008*(\text{Log2}(v2) - 3,4)^{5,8} + 0,00004*(\text{Log2}(v3))^4 + 0,00003*(\text{Log2}(v4) + 1,9)^{4,2} + 0,000005*(\text{Log}(v5))^{10,5} + 0,0001*(\text{Log2}(v7) - 2,5)^{4,2} - 0,004*\text{Nachylenie dachu} + 0,093*\text{Ściany zewn. (101)} + 0,063*\text{Ściany zewn. (102)} + 0,064*\text{Ściany zewn. (103)} + 0,211*\text{Ściany zewn. (104)} + 0,043*\text{Ściany zewn. (105)} + 0,175*\text{Ściany zewn. (106)} + 0,144*\text{Ściany zewn. (107)} + 0,020*\text{Strop (101)} - 0,100*\text{Strop (102)} - 0,089*\text{Strop (103)} - 0,075*\text{Pokrycie dachu (101)} - 0,063*\text{Pokrycie dachu (102)} + 0,014*\text{Pokrycie dachu (103)} + 0,053*\text{Pokrycie dachu (104)} - 0,033*\text{Pokrycie dachu (105)} - 0,021*\text{Ogrzewanie (101)} + 0,013*\text{Ogrzewanie (102)} + 0,012*\text{Ogrzewanie (103)})}$</p>						

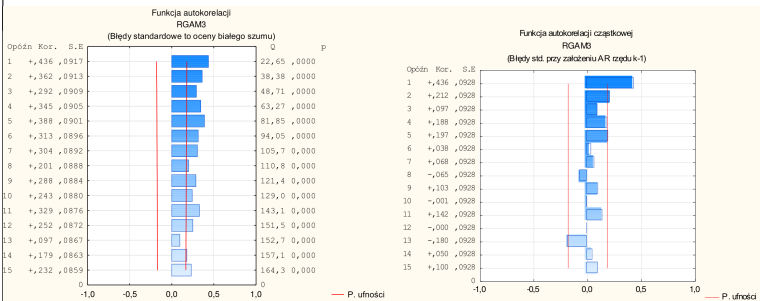
**KRZYWE SKLEJANE
I 95% PAS UFNOŚCI**



**WYKRES WARTOŚCI
RZECZYWISTYCH I
PROGNOZOWANYCH**



**WYKRESY FUNKCJI
AUTOKORELACJI
RESZT I
AUTOKORELACJI
CZĄSTKOWYCH
RESZT**



BŁĄD MAPE [%]

6,199

**OCENA PRAWDLIWOŚCI MODELU REGRESYJNEGO
NIEPRAWIDŁOWY**

11.3.7. PROGNOZOWANIE METODĄ WEKTORÓW NOŚNYCH

Obliczono modele prognostyczne metodą wektorów nośnych o różnych typach jąder SVM1 Liniowe, SVM1 Wielomianowe, SVM1 RBF i SVM1 Sigmoidalne. Nie stwierdzono prawidłowości predykcji ze względu na występowanie we wszystkich modelach funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej reszt. W tabeli 6 zestawiono wyniki obliczeń modelu SVM1 Sigmoidalne.

Tabela 6.

Zestawienie wyników obliczeń modelu SVM1 Sigmoidalne ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$) metodą wektorów nośnych. Źródło: opracowanie własne.

METODA OBLICZEŃ I MODEL REGRESYJNY	SVM1 Sigmoidalne ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$)
ZMIENNA ZALEŻNA	v_1
ZMIENNE NIEZALEŻNE	$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$
PREDYKTORY	$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$
TYP JĄDRA	SIGMOIDALNE
WZÓR REGRESYJNY	NIE JEST GENEROWANY
WYKRES WARTOŚCI RZECZYWISTYCH I PROGNOZOWANYCH	<p>Linowy - wiele zmiennych SVM1 Sigmoidalne ($v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$)</p>
WYKRESY FUNKCJI AUTOKORELACJI RESZT I AUTOKORELACJI CZĄSTKOWYCH RESZT	
BŁĄD MAPE [%]	9,592
OCENA PRAWIDŁOŚCI MODELU REGRESYJNEGO NIEPRAWIDŁOWY	

11.3.8. METODA AUTOMATYCZNYCH SIECI NEURONOWYCH

Obliczono 3 modele prognostyczne metodą automatycznych sieci neuronowych. W tabeli 7 zestawiono wyniki obliczeń modelu NN3 MLP 32-14-1. Jest to prawidłowy model prognostyczny ze względu na jednoczesne nie występowanie funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej reszt oraz na błąd $MAPE = 4,258\% < 15\%$. Pozostałe modele prognostyczne uzyskane metodą automatycznych sieci neuronowych nie były prawidłowe.

Tabela 7.

Zestawienie wyników obliczeń modelu NN3 MLP 32-14-1 ($v_1; v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$) metodą automatycznych sieci neuronowych. Źródło: opracowanie własne.

METODA OBLICZEŃ I MODEL REGRESYJNY	NN3 MLP 32-14-1 ($v_1; v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$)						
ZMIENNA ZALEŻNA	v_1						
ZMIENNE NIEZALEŻNE	$v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$						
PREDYKTORY	$v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$						
PODSUMOWANIE REGRESJI	Podsumowanie aktywnych sieci						
	Id sieci	Nazwa sieci	Jakość (uczenie)	Jakość (testowanie)	Jakość (walidacja)	Błąd (uczenie)	Błąd (testowanie)
	73	MLP 28-5-1	0,959491	0,780266	0,788003	8024,208	42302,15
	Błąd (walidacja)		Algorytm uczenia	Funkcja błędu	Aktywacja (ukryte)	Aktywacja (wyjściowe)	
69091,93		BFGS 98	SOS	Logistyczna	Logistyczna		
WZÓR REGRESYJNY	NIE JEST GENEROWANY						
WYKRES WARTOŚCI RZECZYWISTYCH I PROGNOZOWANYCH	<p>Liniowy wiele zmiennych NN3 MLP32-14-1</p> <p>Wykres przedstawia zmiany cen netto 1m2 w czasie. Oś X ma podziałkę co 10 jednostek (1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101, 111). Oś Y ma podziałkę co 200 jednostek (2200, 2400, 2600, 2800, 3000, 3200, 3400, 3600, 3800, 4000, 4200). Legenda: niebieska linia - Cena netto 1m2, czerwona linia - NN3.</p>						

WYKRESY FUNKCJI AUTOKORELACJI RESZT I AUTOKORELACJI CZĄSTKOWYCH RESZT																																																																	
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Opóźn. Roc.</th> <th>S.E.</th> <th>Q</th> <th>P</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>+0,17 ,0917</td><td>2,09</td><td>,8552</td></tr> <tr><td>2</td><td>-0,131 ,0913</td><td>2,46</td><td>,0925</td></tr> <tr><td>3</td><td>+0,055 ,0909</td><td>2,46</td><td>,6517</td></tr> <tr><td>4</td><td>-0,002 ,0905</td><td>5,79</td><td>,3272</td></tr> <tr><td>5</td><td>-0,144 ,0901</td><td>5,92</td><td>,4320</td></tr> <tr><td>6</td><td>-0,033 ,0896</td><td>6,07</td><td>,5316</td></tr> <tr><td>7</td><td>+0,034 ,0892</td><td>6,22</td><td>,6222</td></tr> <tr><td>8</td><td>+0,035 ,0888</td><td>6,45</td><td>,6943</td></tr> <tr><td>9</td><td>-0,042 ,0884</td><td>6,49</td><td>,7328</td></tr> <tr><td>10</td><td>-0,017 ,0880</td><td>8,60</td><td>,6586</td></tr> <tr><td>11</td><td>+0,127 ,0876</td><td>9,34</td><td>,6736</td></tr> <tr><td>12</td><td>+0,075 ,0872</td><td>15,31</td><td>,2882</td></tr> <tr><td>13</td><td>-0,212 ,0867</td><td>15,44</td><td>,3487</td></tr> <tr><td>14</td><td>-0,031 ,0863</td><td>15,58</td><td>,4107</td></tr> <tr><td>15</td><td>+0,032 ,0859</td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	Opóźn. Roc.	S.E.	Q	P	1	+0,17 ,0917	2,09	,8552	2	-0,131 ,0913	2,46	,0925	3	+0,055 ,0909	2,46	,6517	4	-0,002 ,0905	5,79	,3272	5	-0,144 ,0901	5,92	,4320	6	-0,033 ,0896	6,07	,5316	7	+0,034 ,0892	6,22	,6222	8	+0,035 ,0888	6,45	,6943	9	-0,042 ,0884	6,49	,7328	10	-0,017 ,0880	8,60	,6586	11	+0,127 ,0876	9,34	,6736	12	+0,075 ,0872	15,31	,2882	13	-0,212 ,0867	15,44	,3487	14	-0,031 ,0863	15,58	,4107	15	+0,032 ,0859		
Opóźn. Roc.	S.E.	Q	P																																																														
1	+0,17 ,0917	2,09	,8552																																																														
2	-0,131 ,0913	2,46	,0925																																																														
3	+0,055 ,0909	2,46	,6517																																																														
4	-0,002 ,0905	5,79	,3272																																																														
5	-0,144 ,0901	5,92	,4320																																																														
6	-0,033 ,0896	6,07	,5316																																																														
7	+0,034 ,0892	6,22	,6222																																																														
8	+0,035 ,0888	6,45	,6943																																																														
9	-0,042 ,0884	6,49	,7328																																																														
10	-0,017 ,0880	8,60	,6586																																																														
11	+0,127 ,0876	9,34	,6736																																																														
12	+0,075 ,0872	15,31	,2882																																																														
13	-0,212 ,0867	15,44	,3487																																																														
14	-0,031 ,0863	15,58	,4107																																																														
15	+0,032 ,0859																																																																
BŁĄD MAPE [%]	4,258																																																																
OCENA PRAWDŹLIWOŚCI MODELU REGRESYJNEGO PRAWDŹLIWY																																																																	

11.3.9. ANALIZA PRAWDŹLIWOŚCI I WYBÓR MODELU PROGNOSTYCZNEGO

W tabeli 8 zestawiono wszystkie obliczone modele w programie STATISTICA.

Tabela 8.

Zestawienie i analiza prawdziwości modeli prognostycznych. Źródło: opracowanie własne.

Lp	Nazwa modelu	Wzór regresyjny	Auto-korelacja reszt	Błąd MAPE [%]	Poprawność modelu
1	MR1 (v1; v2, v4, v6, v7, v9)	MR1 (v1; v2, v4, v6, v7, v9) = -2492,77293 - 8,11819*Pow. użytkowa + 11,02868*Pow. garażu - 12,45971*Nachylenie dachu + 1,78503*Kubatura netto + 55,82831 * KOD Ściany zewn.	TAK	7,990	NIE
2	MR2 (v1; v6, v9, v16, v18, v20)	MR2 (v1; v6, v9, v16, v18, v20) = -3274,13205 + 0,35338*((Log2(v7) - 2,5)^4,2) + 0,15106*((Log2(v4) + 1,9)^4,2) - 0,19516*((Log2(v2) - 3,4)^5,8) - 11,62301*Nachylenie dachu + 55,04819*KOD Ściany zewn.	TAK	10,591	NIE
3	MR3 (v1; v16, v18, v20)	MR3 (v1; v16, v18, v20) = 1845,27817 - 0,16011*((Log2(v2) - 3,4)^5,8) + 0,17860*((Log2(v4) + 1,9)^4,2) + 0,32722*((Log2(v7) - 2,5)^4,2)	TAK	8,947	NIE
4	MARS1 (v1; v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v10, v12, v14)	MARS1 (v1; v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v10, v12, v14) = 2852,083 - 21,497*max(0; 33,250 - Pow. garażu) - 225,531*max(0; Ściany zewn. beton komórkowy 40) + 10,571*max(0; 208,830 - Pow. użytkowa) + 1,597*max(0; Kubatura netto - 487,310) - 2,833*max(0; 487,310 - Kubatura netto) - 13,270*max(0; Nachylenie dachu - 2,000)	TAK	8,415	NIE
5	MARS2 (v1; v2, v3, v4, v5, v7, v9)	MARS2 (v1; v2, v3, v4, v5, v7, v9)	TAK	8,752	NIE

6	MARS3 ($v_1; v_1; v_6, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$)	MARS3 ($v_1; v_1; v_6, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$) = $2736,645 - 0,189 \cdot \max(0; 3449,229 - ((\log_2(v_4) + 1,9)^{4,2}) + 58,805 \cdot \max(0; \text{KOD Ściany zewn.} - 101,000) - 12,266 \cdot \max(0; \text{Nachylenie dachu} - 2,000) - 0,147 \cdot \max(0; ((\log_2(v_2) - 3,4)^{5,8})) - 1902,701 + 0,531 \cdot \max(0; 1902,701 - ((\log_2(v_2) - 3,4)^{5,8})) + 0,471 \cdot \max(0; ((\log_2(v_7) - 2,5)^{4,2})) - 1418,740 + 1,877 \cdot \max(0; ((\log_2(v_7) - 2,5)^{4,2})) - 3727,501 - 1,565 \cdot \max(0; ((\log_2(v_7) - 2,5)^{4,2}) - 3471,127)$	TAK	7,936	NIE
7	GAM1 ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{13}$)	GAM1 ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{13}$) = $e^{(5,531 - 0,003 \cdot \text{Pow. użytkowa} + 0,0008 \cdot \text{Pow. zabudowy} + 0,002 \cdot \text{Pow. garażu} + 0,017 \cdot \text{Wysokość} - 0,005 \cdot \text{Nachylenie dachu} + 0,0005 \cdot \text{Kubatura netto} + 0,020 \cdot \text{KOD Ściany zewn.} + 0,004 \cdot \text{KOD Pokrycie dachu})$	TAK	6,632	NIE
8	GAM2 ($v_1; v_2, v_7, v_{17}, v_{18}, v_{19}$)	GAM2 ($v_1; v_2, v_7, v_{17}, v_{18}, v_{19}$) = $e^{(7,868 - 0,002 \cdot \text{Pow. użytkowa} + 0,0006 \cdot \text{Kubatura netto} - 0,00002 \cdot ((\log_2(v_3))^{4,2}) + 0,00006 \cdot ((\log_2(v_4) + 1,9)^{4,2}) + 0)}$	TAK	9,090	NIE
9	GAM3 ($v_1; v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$)	GAM3 ($v_1; v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$) = $e^{(7,741 - 0,00008 \cdot ((\log_2(v_2) - 3,4)^{5,8}) + 0,00004 \cdot ((\log_2(v_3))^{4,2}) + 0,00003 \cdot ((\log_2(v_4) + 1,9)^{4,2}) + 0,000005 \cdot ((\log_2(v_5))^{10,5}) + 0,0001 \cdot ((\log_2(v_7) - 2,5)^{4,2}) - 0,004 \cdot \text{Nachylenie dachu} + 0,093 \cdot \text{Ściany zewn. (101)} + 0,063 \cdot \text{Ściany zewn. (102)} + 0,064 \cdot \text{Ściany zewn. (103)} + 0,211 \cdot \text{Ściany zewn. (104)} + 0,043 \cdot \text{Ściany zewn. (105)} + 0,175 \cdot \text{Ściany zewn. (106)} + 0,144 \cdot \text{Ściany zewn. (107)} + 0,020 \cdot \text{Strop (101)} - 0,100 \cdot \text{Strop (102)} - 0,089 \cdot \text{Strop (103)} - 0,075 \cdot \text{Pokrycie dachu (101)} - 0,063 \cdot \text{Pokrycie dachu (102)} + 0,014 \cdot \text{Pokrycie dachu (103)} + 0,053 \cdot \text{Pokrycie dachu (104)} - 0,033 \cdot \text{Pokrycie dachu (105)} - 0,021 \cdot \text{Ogrzewanie (101)} + 0,013 \cdot \text{Ogrzewanie (102)} + 0,012 \cdot \text{Ogrzewanie (103)})}$	TAK	6,199	NIE
10	SVM1 Liniowe ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$)	generowany w postaci sieci neuronowej	TAK	7,386	NIE
11	SVM1 Wielomianowe ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$)	generowany w postaci sieci neuronowej	TAK	6,305	NIE
12	SVM1 RBF ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$)	generowany w postaci sieci neuronowej	TAK	5,591	NIE
13	SVM1 Sigmoidalne ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$)	generowany w postaci sieci neuronowej	TAK	9,592	NIE
14	NN1 MLP 28-8-1 ($v_1; v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}$)	generowany w postaci sieci neuronowej	NIE	9,461	NIE

15	NN2 MLP 28-5-1 ($v_1; v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$)	generowany w postaci sieci neuronowej	NIE	6,954	NIE
16	NN3 MLP 32-14-1 ($v_1; v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$)	generowany w postaci sieci neuronowej	NIE	4,258	TAK

11.4. WNIOSKI

Celem przeprowadzenia obliczeń było określenie wzoru regresyjnego, który pozwoli na wycenę ceny netto 1 m² powierzchni użytkowej nowo wznoszonych domów jednorodzinnych w województwie lubelskim. Na podstawie uzyskanych wyników można wnioskować, że spośród obliczonych modeli, najlepszym okazał się model NN3 MLP 32-14-1 i to ten model może zostać użyty do prognozowania ceny 1 m² domu jednorodzinnego. Szereg resztowy tego modelu jest białym szumem, a błąd *MAPE* wynosi 4,258% (prognoza dobra). W innych modelach występują autokorelacje reszt oraz brak dopasowania wykresów.

Analiza nowych przypadków, dedykowanych potencjalnemu nabywcy albo wycena wybudowanych obiektów, może być realizowana w bardzo sprawny sposób poprzez wpisywanie preferencji nabywcy lub charakterystyk obiektu, do arkusza programu STATISTICA w wygenerowanej sieci neuronowej.

W bardzo istotny sposób ułatwia to wycenę nieruchomości. Istnieje możliwość uzyskania bardziej wiarygodnych danych, ponieważ do celów analizy wykorzystujemy wiele przypadków (minimalna liczba przypadków to 32 (Rogalska, 2018)) a nie 2 do 3 jak w innych metodach szacowania cen nieruchomości.

11.5. BIBLIOGRAFIA

- AN, S.H., PARK, U.Y., KANG, K.I, CHO, M.Y., CHO, H.H. (2007). Application of Support Vector Machines in Assessing Conceptual Cost Estimates. *J. Comput. Civ. Eng.*, 21, 259.
- BOX, G.E.P., PIERCE, D.A. (1970). Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509–1526.
- BOX, G.E.P., PIERCE, D.A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 65, 1509–1526.
- CELLMER R. (1999). Propozycja procedury wyceny nieruchomości metodą analizy statystycznej rynku. *Wycena*, nr 6(47). Wyd. Educaterra, Olsztyn.

- FIJOREK, K., MRÓZ, K., NIEDZIELA, K., FIJOREK D. (2010). Prognozowanie cen energii elektrycznej na Rynku Dnia Następnego metodami data mining. *Rynek Energii*, 6(91), 46–50.
- FRIEDMAN, J. (1991). Multivariate Adaptive Regression Splines. *Annals of Statistics*, 19, 1–67.
- FRIEDMAN, J. (1991c). Rejoinder. *Annals of Statistics*, 19, 123–141.
- HASTII, T.J., TIBSHIRANI, R.J. (1990). *Generalized Additive Models*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability.
- HOZER J., KOKOT S., KUŹMIŃSKI W. (2002). *Metody analizy statystycznej rynku w wycenie nieruchomości*. Polska Federacja Stowarzyszeń Rzeczoznawców Majątkowych, Warszawa.
- King B.M., Minium E.W. (2009). *Statystyka dla psychologów i pedagogów*. Warszawa, PWN.
- KORNACKI, J., ĆWIK, J. (2005). *Statystyczne systemy uczące się*. Warszawa, WNT.
- KOT, S., JAKUBOWSKI, J., SOKOŁOWSKI, A. (2011). *Statystyka*. Difin.
- KOWALCZYK, Z. (2007). Zastosowanie metody analizy statystycznej rynku w szacowaniu wartości technicznych środków produkcji na przykładzie ciągnika rolniczego. *Inżynieria Rolnicza*, 6 (94).
- LJUNG, G.M., BOX, G.E.P. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, 65, 297–303.
- MADDALA, G.S. (2002). *Introduction to Econometrics*. Wiley.
- MAZURKIEWICZ E. (1999). Uwagi do procedur określania wartości rynkowej nieruchomości przy zastosowaniu analizy statystycznej rynku. *Rzeczoznawca Majątkowy*, nr 2, Polska Federacja Stowarzyszeń Rzeczoznawców Majątkowych, Warszawa.
- MCCLUSKEY W.J. (1996). Zastosowanie sztucznej inteligencji w wycenie masowej dla potrzeb taksacji nieruchomości. *Wycena*, nr 5(28), Olsztyn.
- MCCULLAGH, P., NELDER, J.A. (1989). *Generalized Linear Models*, 2nd ed., London, Chapman and Hall.
- PAWLUKOWICZ R. (2003). *Wycena rynkowa nieruchomości a przewidywanie (szacowanie statystyczne i prognozowanie)*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Ekonometria, nr 1002, tom 12.
- PEARSON, K. (1905). *On the General Theory of Skew Correlation and Non-linear Regression*. London, Dulau & Co.
- ROGALSKA, M. (2016). *Wieloczynnikowe modele w prognozowaniu czasu procesów budowlanych*. Lublin, Politechnika Lubelska.
- RUMELHART, D.E., MCCLELLAND, J.L., & the PDP research group (1986). *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition*. Volume I. Cambridge, MA, MIT Press.

- SCHIMEK, M. (2000). *Smoothing and regression: approaches, computation, and application*. Wiley.
- TADEUSIEWICZ, R. (2010). *Computer simulation of the alive brain*. Warszawa, Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki.
- TADEUSIEWICZ, R. (2010). *How computer science can help to look into the human body*. Warszawa, Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki.
- TSERNG, H.P., LIN, G.F., TSAI, L.K., CHEN, P.CH. (2011). *An enforced support vector machine model for construction contractor default prediction*. Automation in Construction.
- WIŚNIEWSKI R. (1998). Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do wyceny masowej. *Wycena*, nr 1 (36), Wyd. Fundacja im. M. Oczapowskiego, Olsztyn.

Poprzednio wydane tomy w serii

STUDIA Z ZAKRESU BUDOWNICTWA

1. ŁEMPICKI Jerzy – *Teoria zginania belek żelbetowych statycznie niewyznaczalnych*. Warszawa, PWN 1958; s. 115, rys. 62, tabl. 21; Rez., Sum., z1 19 (wyczerpane).
2. KACNER Artur, LEWICKI Bohdan – *Praca budynków z elementów wielkowymiarowych pod działaniem sił poziomych parcia wiatru*. Warszawa, PWN 1959; s. 110, rys. 55, tabl. 2; Rez., Zsf., z1 18 (wyczerpane).
3. LEWICKI Bohdan – *Nośność konstrukcji w przypadku technicznego obciążenia osiowego*. Warszawa, PWN 1960; s. 113, rys. 33, tabl. 15; Rez., Zsf., z1 24 (wyczerpane).
4. SKALMOWSKI Włodzimierz – *Gipsy i anhydryty w Polsce. Możliwości i kierunki ich zastosowań w budownictwie*. Warszawa, PWN 1969; s. 87, mapa 1, ilustr.; Rez., Zsf., z1 18 (wyczerpane).
5. LEWICKI Bohdan, KUKULSKI Wojciech, PAWLIKOWSKI Jan – *Ściany i słupy z betonu i muru obciążone mimośrodowo*. Podstawy teoretyczne obliczeń. Warszawa, PWN 1962; s. 129, rys. 83, tabl. 15; Rez., Sum., z1 24 (wyczerpane).
6. BRANDT Andrzej M. – *Odształcalność betonu w świetle pomiarów sześciu składowych stanu odkształcenia*. Warszawa, Arkady 1968; s. 120, rys. 88, tabl. 2; Rez., Res., Sum., z1 28 (wyczerpane).
7. OSTOJA-PIĘTKOWSKI Jan – *Wpływ konstrukcji budynków mieszkalnych na architekturę ich elewacji*. Warszawa, Arkady 1970; s. 68, rys. 59; Rez., Res., Sum., z1 14 (wyczerpane).
8. KUKULSKI Wojciech – *Nośność smukłych ściskanych elementów betonowych*. Warszawa, Arkady 1970; s. 116, rys. 65, tabl. 14; Rez., Res., Sum., z1 25 (wyczerpane).

STUDIA Z ZAKRESU INŻYNIERII

9. *Mechanizacja budowy mostów* (praca zbiorowa). Warszawa, WKiŁ 1971; s. 572, rys. 343, tabl. 102; z1 90 (wyczerpane).
10. MIANOWSKI Krzysztof M. – *Zagadnienie siły poprzecznej w belkach strunobetonowych*. Warszawa, PWN 1971; s. 124, rys. 59, tabl. 7; Rez., Res., Sum., Zsf., z1 30 (wyczerpane).
11. KASPERKIEWICZ Janusz – *Dyfuzja wilgoci i deformacje skurczowe w betonie*. Warszawa, PWN 1972; s. 129, rys. 69, tabl. 4; Rez., Sum., z1 28 (wyczerpane).
12. *Zagadnienia inżynierii komunikacyjnej* (praca zbiorowa). Warszawa, PWN 1973; s. 192, rys. 45, tabl. 55; Rez., Res., Sum., Zsf., z1 45 (wyczerpane).
13. JENDRZEJEK Stefan, WESELI Jerzy – *Zagadnienia analizy dynamicznej belkowych i płytowych mostów drogowych*. Warszawa, PWN; s. 118, rys. 27; Rez., Sum., z1 24 (wyczerpane).
14. ABSI Elie, BRANDT Andrzej M. – *Analiza i badania płyt żelbetowych w stanie zarysowania*. Warszawa, PWN 1974; s. 128, rys. 60, tabl. 54; Rez., Res., Sum., z1 27 (wyczerpane).
15. MURZEWSKI Janusz – *Teoria nośności losowej konstrukcji prętowych*. Warszawa, PWN 1976; s. 114, rys. 49, tabl. 6; Rez., Res., Sum., z1 24 (wyczerpane).
16. *Nowoczesne metody projektowania dróg komunikacyjnych* (praca zbiorowa). Warszawa, PWN 1977; s. 138, rys. 47, tabl. 8; Rez., Sum., z1 30 (wyczerpane).

17. DREWNOWSKI Sławomir – *Betonowe konstrukcje mostowe sprężono-rozprężne*. Warszawa – Łódź, PWN 1978; s. 80, rys. 60, tabl. 2; Rez., Res., Sum., z1 20 (wyczerpane).
18. RADOMSKI Wojciech – *Badania betonu pod obciążeniami uderzeniowymi*. Warszawa – Łódź, PWN 1978; s. 135, rys. 81, tabl. 10; Rez., Res., Sum., z1 34 (wyczerpane).
19. *Matematyczne modelowanie ujęć wody podziemnej* (praca zbiorowa). Warszawa – Łódź, PWN 1980; s. 251, rys. 103, tabl. 14; Rez., z1 55 (wyczerpane).
20. PATAS Piotr – *Własności betonu w złożonych stanach naprężenia*. Warszawa – Łódź, PWN 1981; s. 61, rys. 17, tabl. 2; Rez., Sum., z1 25 (wyczerpane).
21. BILISZCZUK Jan – *Reologiczna redystrybucja stanu naprężenia w niejednorodnych, izostatycznych konstrukcjach betonowych*. Warszawa – Łódź, PWN 1982; s. 150, rys. 103, tabl. 10; Rez., Res., Sum., Zsf., z1 110 (wyczerpane).
22. BARYŁA Adam, SOBOCIŃSKA Elżbieta – *Teoria płyt żelbetowych z rysami*. Warszawa – Łódź, PWN 1983; s. 110, rys. 39, tabl. 4; Rez., Sum., z1 70 (wyczerpane).
23. MAZURKIEWICZ Bolesław K. – *Mechanika gruntów dna morskiego*. Warszawa – Łódź, PWN 1985; s. 148, rys. 102, tabl. 7; Sum., Zsf., z1 180 (wyczerpane).
24. GIŻEJOWSKI Marian – *Nośność sprężysto-plastycznych belek ciągłych o przekrojach otwartych*. Warszawa – Łódź, PWN 1986; s. 159, rys. 71, tabl. 36; Sum., z1 200 (wyczerpane).
25. *Zastosowanie probabilistyki w nowoczesnych normach konstrukcji i obciążeń* (praca zbiorowa). Warszawa – Łódź, PWN 1987; s. 128, rys. 40, tabl. 23; Rez., Sum., z1 180 (wyczerpane).
26. *Badania doświadczalne żelbetowych ustrojów płytowo-słupowych* (praca zbiorowa pod red. Włodzimierza Starosolskiego). Warszawa – Łódź, PWN 1988; s. 129, rys. 80, tabl. 26; Rez., Rés., Sum., Zaf., z1 300 (wyczerpane).
27. BRUGGELING A. S. G. – *A new approach to concrete structures classification and design*. Warszawa – Łódź, PWN 1989; s. 102, rys. 40, tabl. 8; Streszcz., Sum., Zsf., Res., z1 300 (wyczerpane).
28. *Struktura a własności betonu i kompozytów betonopodobnych. Stan wiedzy w Polsce* (praca zbiorowa pod red. Janusza Kasperkiewicza). Warszawa – Łódź, PWN 1989; s. 104, rys. 9, tabl. 1; Rez., Sum., z1 400 (wyczerpane).
29. LEWIŃSKI Paweł Marek – *Nieliniowa analiza płyt i tarcz żelbetowych metodą elementów skończonych*. Warszawa – Łódź, PWN 1990; s. 126, rys. 40, tabl. 4; Rez., Sum., z1 1400 (wyczerpane).
30. BĄK Grzegorz, STOLARSKI Adam – *Analiza nieliniowa prętowych ustrojów żelbetowych obciążonych impulsowo*. Warszawa 1990; s. 137, rys. 62; Rez., Sum. (wyczerpane).
31. *Stan krajowych prac badawczych z zakresu technologii betonu* (praca zbiorowa pod red. Stanisława Bastiana). Warszawa 1991; s. 85; Rez., Sum., z1 20 000 (wyczerpane).
32. OWCZAREK Stefan – *Optymalizacja kształtu budynków energooszczędnych o podstawie wieloboku*. Warszawa 1992; s. 132, Sum. (wyczerpane).
33. PIEŃKOWSKI Kazimierz, STEMPNIAK Andrzej – *Wykorzystanie akumulacyjności cieplnej budynku w pracy instalacji centralnego ogrzewania*. Warszawa 1992; s. 78, rys. 30, Sum.

34. LASKOWSKI Leszek – *Systemy biernego ogrzewania słonecznego. Zagadnienia funkcjonowania i efektywności energetycznej* Warszawa 1993; s. 126, rys. 35, Sum. (wyczerpane).
35. ZAWADA Bernard A. – *Analiza procesu użytkowania energii cieplnej w eksploatacji obiektów przemysłowych*. Warszawa 1993; s. 126, rys. 61, Sum.
36. CZKWANIANC Artem, KAMIŃSKA Maria – *Metoda nieliniowej analizy żelbetonowych elementów prętowych*. Warszawa 1993; s. 128, Sum.
37. CHWIEDUK Dorota – *Słoneczne i gruntowe systemy grzewcze. Zagadnienia stymulacji funkcjonowania i wydajności cieplnej*. Warszawa 1994; s. 144, Sum. (wyczerpane).
38. *Metody optymalizacji materiałów kompozytowych o matrycach cementowych* (praca zbiorowa pod red. A. M. Brandta). Warszawa 1994; s. 270, rys., tabl., Sum. (wyczerpane).
39. LESZCZYŃSKA-SYDOR Małgorzata – *Dynamiczna izolacja cieplna przegród budowlanych*. Warszawa 1994; s. 77, rys., tabl., Sum.
40. GRYCZMAŃSKI Maciej – *Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntów*. Warszawa 1995; s. 157, rys., tabl., Sum. (wyczerpane).
41. CHMIELNICKI Witold Józef – *Sterowanie mocą w budynkach zasilanych z centralnych źródeł ciepła*. Warszawa 1996; s. 168, rys., tabl., Sum. (wyczerpane).
42. BŁAZIK-BOROWA Ewa, FLAGA Andrzej, KAZAKIEWICZ Michał I. – *Problemy interferencji aero-dynamicznej dwóch walców kołowych*. Warszawa 1997 s. 100, rys, tabl., Sum.
43. KAPLIŃSKI Oleg – *Modelling of construction processes. A managerial approach*. Warszawa 1997; s. 176, rys., tabl., Streszcz.
44. WYRWAŁ Jerzy, ŚWIRSKA Jadwiga – *Problemy zawilgocenia przegród budowlanych*. Warszawa 1998; s. 108, rys., tabl., Sum. (wyczerpane).
45. KOSSECKA Elżbieta – *Wybrane zagadnienia dynamiki cieplnej ścian budynków*. Warszawa 1998; s. 120, rys., tabl., Sum.
46. *Optymalizacja wielokryterialna budynków energooszczędnych* (praca zbiorowa pod redakcją W. Marksa i S. Owczarka). Warszawa 1999; s. 191, rys., tabl., Sum.
47. GRZESZCZYK Stefania – *Reologia zawieszin cementowych*. Warszawa 1999; s. 108, rys., tabl., Sum.
48. BOŁTRYK Michał – *Rola wibracji w kształtowaniu właściwości cementowych ośrodków dyspersyjnych*. Warszawa – Białystok 1999; s. 150, rys., tabl., Sum.
49. MARKS Maria – *Analiza i optymalizacja kompozytów uzbrojonych dwiema rodzinami włókien*. Warszawa 2000; s. 115, rys., tabl., Sum.
50. ROŻNIAKOWSKI Kazimierz – *Zastosowanie promieniowania laserowego w badaniach i modyfikacji właściwości materiałów budowlanych. Wybrane zagadnienia*. Warszawa – Łódź 2001; s. 198, rys., tabl., Sum.
51. STOLARSKI Adam, CICHORSKI Waldemar – *Modelowanie statycznego i dynamicznego zachowania niesprężystych tarcz żelbetonowych*. Warszawa 2002; s. 210, rys. 82, tabl., Sum.
52. MARYNOWICZ Andrzej, WYRWAŁ Jerzy – *Badanie właściwości wilgotnościowych wybranych materiałów budowlanych w warunkach izotermicznych* Warszawa 2005; s. 96, rys., tabl., Sum.

53. SZCZURASZEK Tomasz (Red.) – *Badanie zagrożeń w ruchu drogowym*. Warszawa 2005; s. 120, rys., tabl., Sum.
54. JĘDRZEJUK Hanna – *Optymalizacja osiedli mieszkaniowych*. Warszawa 2006; s. 220, rys., tabl., Sum.
55. MIEDZIAŁOWSKI Czesław, MALESZA Mikołaj – *Budynki o szkieletcie drewnianym z poszyciem*. Warszawa–Białystok 2006; s. 320, rys., tabl., Sum.
56. PIEŃKOWSKI Cezary A. – *Centralne ogrzewanie i komplikacje związane z rozliczaniem kosztów*. Warszawa–Białystok 2006; s. 90, rys., Sum.
57. *Metody i modele badań w inżynierii przedsięwzięć budowlanych* (praca zbiorowa pod red. Olega Kaplińskiego). Warszawa 2007; s. 415, rys. 119, tabl. 26; Rez., Sum.
58. PALECZEK Witold – *Metoda określania wielkości i zasięgu deformacji powierzchni terenu powodowanych podziemną eksploatacją złóż z uwzględnieniem własności geomechanicznych skał górotworu*. Warszawa 2007; s. 166, rys. 94, tabl. 3; Sum.
59. KWIETNIEWSKI Marian – *GIS in water supply and wastewater systems*. Warszawa 2008; s. 242, rys. 75, tabl. 11; Sum.
60. JAWORSKI Jan – *Termografia budynków w otaczającym środowisku. Obrazy termalne budynków w ocenie ich sprawności cieplnej*. Warszawa 2008; s. 178, rys. 34, tabl. 9; Sum.
61. SIWOŃ Zbigniew, ŁOMOTOWSKI Janusz, CIEŻAK Wojciech, LICZNAR Paweł, CIEŻAK Jan – *Analizy i prognozowanie rozbiorów wody w systemach wodociągowych*. Warszawa 2008; s. 120, rys. 48, tabl. 22; Sum.
62. SZCZURASZEK Tomasz – *Prędkość pojazdów w warunkach drogowego ruchu swobodnego*. Warszawa 2008; s. 168, rys. 57, tabl. 37; Sum.
63. BILIŃSKI Tadeusz, ŚREDNIAWA Wojciech, FURTAK Kazimierz, CHOLEWICKI Andrzej, SZULC Jarosław, ROEHRYCH Paweł – *Konstrukcje zespolone*. Warszawa 2008; s. 98, rys. 78, tabl. 2; Sum.
64. SULEWSKA Maria – *Sztuczne sieci neuronowe w modelowaniu zagadnień oceny zanieczyszczenia gruntów niespoistych*. Warszawa – Białystok 2009; s. 164, rys. 64, tabl. 43; Sum., Rez.
65. PERKOWSKI Zbigniew – *Modelowanie mikrouszkodzeń w kruchych materiałach budowlanych z uwzględnieniem zjawisk powierzchniowych*. Warszawa 2009; s. 152, rys. 38, tabl. 12; Sum.
66. KLEDYŃSKI Zbigniew, RAFALSKI Leszek – *Zawiesiny twardniejące*. Warszawa 2009; s. 254, rys. 137, tabl. 34; Sum.
67. KWIETNIEWSKI Marian, RAK Janusz – *Niezawodność infrastruktury wodociągowej i kanalizacyjnej w Polsce*. Warszawa 2010; s. 134, rys. 23, tabl. 30; Sum.
68. KOTOWSKI Andrzej, KAŻMIERCZAK Bartosz, DANCEWICZ Andrzej – *Modelowanie opadów do wymiarowania kanalizacji*. Warszawa 2010; s. 170; Sum.
69. GAWIN Dariusz – *Procesy degradacji mikrostruktury kompozytów cementowych w wysokiej temperaturze*. Warszawa 2010; s. 232, rys. 63, tabl. 17; Sum.
70. SZELKA Janusz – *Konstrukcje składane w mostownictwie*. Warszawa 2010; s. 128, rys. 91, tabl. 16; Sum.
71. PIEŃKOWSKI Cezary A. – *Regulacja rozliczania kosztów ogrzewania w budynkach wielorodzinnych*. Warszawa–Białystok 2010; s. 100, rys. 11, tabl. 8; Sum.

72. BRANDT Andrzej M. (red.) – *Zastosowanie popiołów lotnych z kotłów fluidalnych w betonach konstrukcyjnych*. Warszawa 2010; s. 300, rys. 174, tabl. 116; Sum.
73. HEIM Dariusz – *Modyfikacja termo-optycznych właściwości transparentnych elementów obudowy budynków*. Warszawa 2011.
74. WALERIAN Elżbieta – *To live in better environment*. Warszawa 2011; s. 200, rys. 20, tabl. 13; Streszcz.
75. KLEMM Katarzyna – *Kompleksowa ocena warunków mikroklimatu w luźnych i zwartych strukturach urbanistycznych*. Warszawa 2011; s. 172, rys. 66, tabl. 41; Sum.
76. ŁAGODA Marek – *Wzmacnianie konstrukcji mostowych kompozytami polimerowymi*. Warszawa 2012; s. 208, rys. 114, tabl. 14; Sum.
77. ŚWIRSKA-PERKOWSKA – *Adsorpcja i ruch wilgoci w porowatych materiałach budowlanych w warunkach izotermicznych*. Warszawa 2012; s. 226, rys. 118, tabl. 22, Sum.
78. KRYKOWSKI Tomasz – *Modelowanie uszkodzenia otuliny wywołanego korozją zbrojenia w żelbecie*. Warszawa 2012; s. 174, rys. 60, tabl. 20, Sum.
79. ŻUKOWSKI Mirosław – *Modelowanie zużycia ciepła w budynku*. Warszawa-Białystok 2012, s. 186, rys. 95, tabl. 20, Sum.
80. GARBALIŃSKA Halina – *Desorpcyjne badania nieliniowości dyfuzji wilgoci w zakresie higroskopijnym*. Warszawa 2013; s. 188, rys. 72, tabl. 26, Sum.
81. GILEWSKI Wojciech – *Fizyczne funkcje kształtu w metodzie elementów skończonych*. Warszawa 2013; s. 222, rys. 55, tabl. 1, Sum.
82. JANOWSKA-RENKAS Elżbieta – *Budowa superplastyfikatora a efektywność jego wpływu na właściwości zaczynu cementowego*. Warszawa 2013; s. 120, rys. 75, tabl. 16, Sum.
83. PIOTROWSKI Jerzy Z. – *Procesy wymiany ciepła i ruchu powietrza w przegrodach wentylowanych*. Warszawa 2013; s. 158, rys. 61, tabl. 15, Sum.
84. MERKISZ Jerzy, PIELECHA Jacek, FUC Paweł – *Badania i analiza zużycia energii i emisji zanieczyszczeń przez pojazdy w sieci drogowej*. Warszawa 2014; s. 161, rys. 105, tabl. 31, Sum.
85. KWIETNIEWSKI Marian, PODEDWORNA Jolanta, SOZAŃSKI Marek – *Stan aktualny i kierunki rozwoju nauki w zakresie zaopatrzenia w wodę, usuwania i unieszkodliwiania ścieków i osadów oraz gospodarki odpadami*. Warszawa 2014; s. 368, Sum.
86. TRACZ Marian, WOŹNIAK Krystian, BUCZEK Piotr – *Rola obwodnic w poprawie klimatu akustycznego otoczenia przejeżdżających przez miasta*. Kraków 2014; s. 193, rys. 84, tabl. 12, Sum.
87. NAGÓRSKI Roman, BŁAŻEJOWSKI Krzysztof, NAGÓRSKA Magdalena – *Studium właściwości mechanicznych konstrukcji nawierzchni drogowej podatnej z uwzględnieniem trwałości. Zagadnienia wybrane*; Warszawa 2014; s. 141, rys. 63, tabl. 111, Sum.
88. OLASZEK Piotr – *Cyfrowe metody pomiarowe w zastosowaniu do badań mostów*. Warszawa 2015; s. 175, rys. 102, tabl. 6, Sum.
89. SZELKA Janusz, WRONA Zbigniew – *Informatyczne wspomaganie procesów informacyjno-decyzyjnych w budownictwie*. Warszawa 2015; s. 139, rys. 83, tabl. 13, Sum.
90. KORENTZ Jacek – *Metoda analizy żelbetowych elementów prętowych w stanie deformacji pozakrytycznych*. Warszawa 2015, s. 199, rys. 125, tabl. 5, Sum.

91. KASPROWICZ Tadeusz – *Inżynieria przedsięwzięć budowlanych. Rekomendowane metody i techniki*. Warszawa 2015.
92. *Współczesna mechanika konstrukcji w projektowaniu inżynierskim* (praca zbiorowa pod red. Andrzeja Garsteckiego, Wojciecha Gilewskiego i Zbigniewa Pozorskiego). Warszawa 2015; s. 419, rys. 239, tabl. 55.
93. URBANIAK Andrzej – *Komputerowe wspomaganie eksploatacji obiektów i procesów w systemach zaopatrzenia w wodę i oczyszczania ścieków*. Warszawa 2016; s. 196, rys. 43, tabl. 2, Sum.
94. JEMIOŁO Stanisław – *Relacje konstytutywne hipersprężystości*. Warszawa 2016; s. 308.
95. NAGRODZKA-GODYCKA Krystyna – *Betonowe wsporniki sprężone*. Warszawa 2016; s. 228.
96. NOWOGOŃSKA Beata – *Diagnoza w procesie starzenia budynków mieszkalnych wykonanych w technologii tradycyjnej*. Warszawa 2017; s. 152.
97. SZAJNA Waldemar St. – *Współdziałanie konstrukcji budowlanych z podłożem. Interpretacja badań gruntu i analizy numeryczne zagadnień geotechniki*. Warszawa 2017; s. 336.
98. PICHNIARCZYK Paweł – *Wpływ wybranych tlenków metali ciężkich na proces wiązania cementu i jego znaczenie w budownictwie*. Kraków 2018; s. 90.